Matemática en aulas de plurigrado: las nociones espaciales y geométricas en la escuela primaria

Sembrador
Programa de fortalecimiento de escuelas rurales.

Matemática
en aulas de plurigrado:
las nociones espaciales
y geométricas en la
escuela primaria

Agradecemos muy especialmente a
Cecilia Laspina y María Laura Imvinkelried
quienes con enorme dedicación desarrollaron
esta publicación que hoy llega a tu escuela.

La Fundación Bunge y Born acompaña, desde hace más de 50 años, el trabajo de escuelas en contextos rurales, y hace 20 años decidió unir esfuerzos con la Fundación Perez Companc. Desde el Programa Sembrador, diseñamos e implementamos intervenciones específicamente pensadas para potenciar las prácticas en estos contextos particulares.

La enseñanza de la matemática es un tema prioritario en Argentina y se vuelve aún más complejo cuando se combina con los desafíos propios del trabajo simultáneo con grupos de niños de diferentes niveles y edades. Es por eso que diseñamos la serie de publicaciones “Matemática en aulas de plurigrado”, con el objetivo de actualizar y ampliar los contenidos de los cursos virtuales ofrecidos por el Programa Sembrador y llegar a más docentes.

Esta serie está pensada desde el abordaje requerido para el trabajo en plurigrado. Además, retoma el juego como recurso privilegiado de enseñanza, entendiendo que es la forma principal en que los niños conocen el mundo.

Esta segunda publicación, denominada “Las nociones espaciales y geométricas en la escuela primaria”, presenta estrategias específicas para acompañar al docente en la enseñanza de la Geometría y fortalecer los aprendizajes de todos los alumnos, desde el más pequeño al más grande.

A lo largo de la publicación encontrarán una serie de propuestas, con todas sus actividades y niveles de desarrollo, y sugerencias concretas para trabajar en la clase. También podrán acceder a ellas a través de fichas que están pensadas para que las puedan imprimir y llevar al aula, y que encontrarán en el anexo o en www.fundacionbyb.org/publicaciones.

Esperamos que este material resulte útil y sencillo, y que llegue a todos los rincones del país para acompañar a los docentes en su tarea diaria.

Programa Sembrador

Introducción

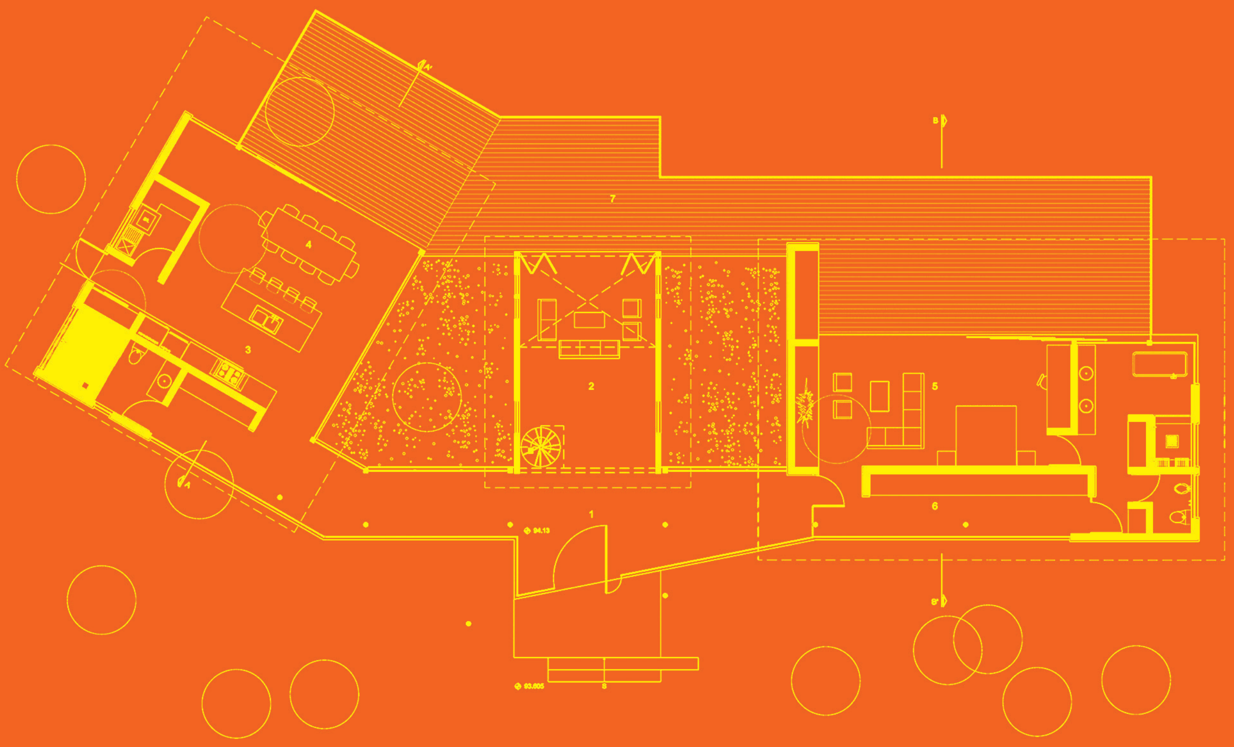
¿Por qué es importante enseñar Geometría en las aulas de la escuela primaria actual? ¿Qué lugar ocupa hoy la Geometría en la educación primaria? ¿Cómo enseñar Geometría al mismo tiempo a alumnos de distintos niveles? Éstas y otras preguntas que nos hacemos habitualmente fueron una guía para el diseño de esta publicación y, de alguna manera, irán interactuando con las propuestas didácticas que se presentan para llevar al aula de plurigrado, de una manera que esperamos sea sencilla y amena.

Seguramente estarán pensando cómo organizar la lectura de esta publicación para que la misma resulte ordenada y sea aprovechada de la mejor manera posible. En cada sección encontrarán, en primer lugar, apartados teóricos en los que se recuperan aportes de grandes especialistas en el área, que nutren el análisis de las propuestas y les otorgan sustento teórico-didáctico. A continuación de cada apartado teórico, se presenta una propuesta relacionada a algún tópico geométrico y se sugieren, cuando el contenido lo posibilita, tres niveles de desarrollo —amarillo, anaranjado y rojo—, lo cual permite orientar la lectura y seleccionar la versión adecuada, según el grupo de estudiantes con el que se esté trabajando en el momento.

Para cada propuesta, se indican sugerencias en cuanto a las formas de organizar a los alumnos, incluyendo actividades que será necesario realizar en pequeños grupos, lo cual permitirá la discusión y "puesta a punto" de algunas primeras conclusiones. También encontrarán en cada una un análisis didáctico en el cual se destacan los contenidos que se trabajan, los tipos de tareas geométricas involucradas en las actividades como así también las conclusiones matemáticas a las que es deseable arribar.

Deseamos que esta publicación los acompañe a lo largo de todo el año al momento de pensar su planificación diaria, que sea un insumo de trabajo y que, de alguna manera, los invite y entusiasme a apasionarse por la enseñanza de la Geometría tanto como lo estamos nosotras.

Cecilia Laspina y María Laura Imvinkelried



Algunas consideraciones acerca de la enseñanza de la geometría en la escuela primaria

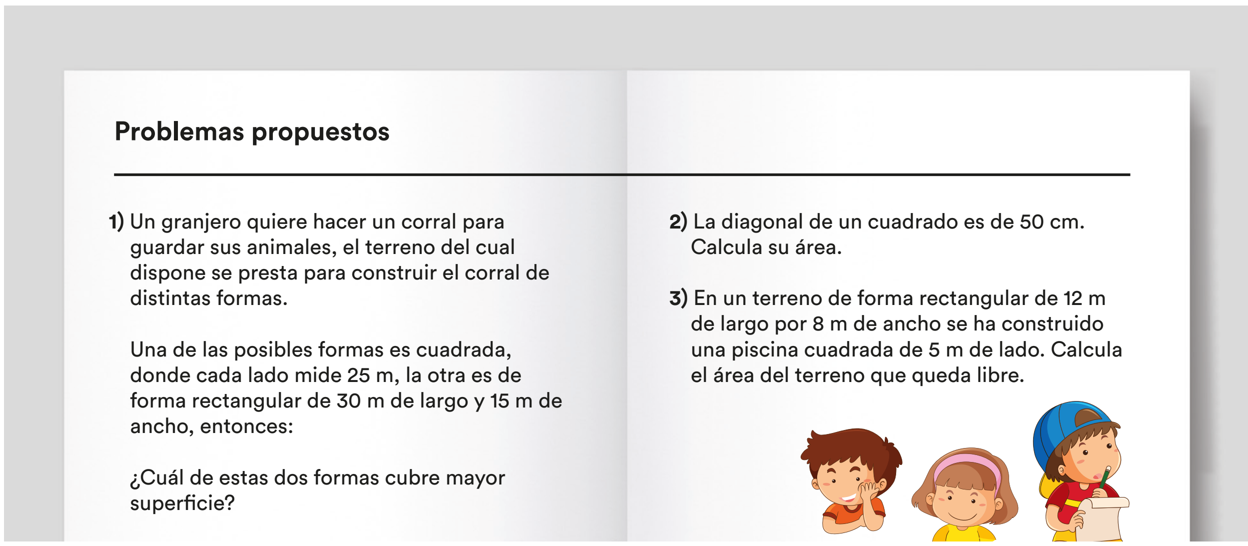
¿Qué conocimientos son necesarios para ubicarnos en el espacio que nos rodea? ¿Y para interpretar representaciones del espacio o de distintos objetos, o ubicar puntos en el plano gráfico? ¿Qué es necesario saber acerca de las figuras y los cuerpos para resolver problemas que requieren construir objetos o diseños? ¿Qué aporta el análisis de las propiedades de las figuras y los cuerpos geométricos a la formación del ciudadano?

Éstas y otras preguntas permiten reflexionar acerca del sentido de lo que se enseña, y se deja de enseñar, en la escuela primaria de hoy en relación con los conocimientos espaciales y geométricos. También permiten analizar diversas propuestas para implementar en las aulas.

Pareciera existir un acuerdo acerca de los saberes que la escuela debe ayudar a construir, y que éstos se relacionan más con el uso de los números y las operaciones, que con los saberes espaciales y geométricos.

En nuestra tradición de enseñanza, y en particular en el trabajo sobre el eje geométrico, se han priorizado actividades que remiten al cálculo de medidas por ser las que más se relacionan con aplicaciones en contextos vinculados a la vida cotidiana, poniendo énfasis en la aplicación de fórmulas. De la misma manera, el trabajo sobre figuras geométricas se ha centrado en el reconocimiento de elementos, la aplicación de propiedades y la utilización de clasificaciones ya elaboradas por manuales escolares.

Estas cuestiones se pueden ver reflejadas en los siguientes ejemplos de actividades que suelen utilizarse en los manuales escolares:



Problemas propuestos

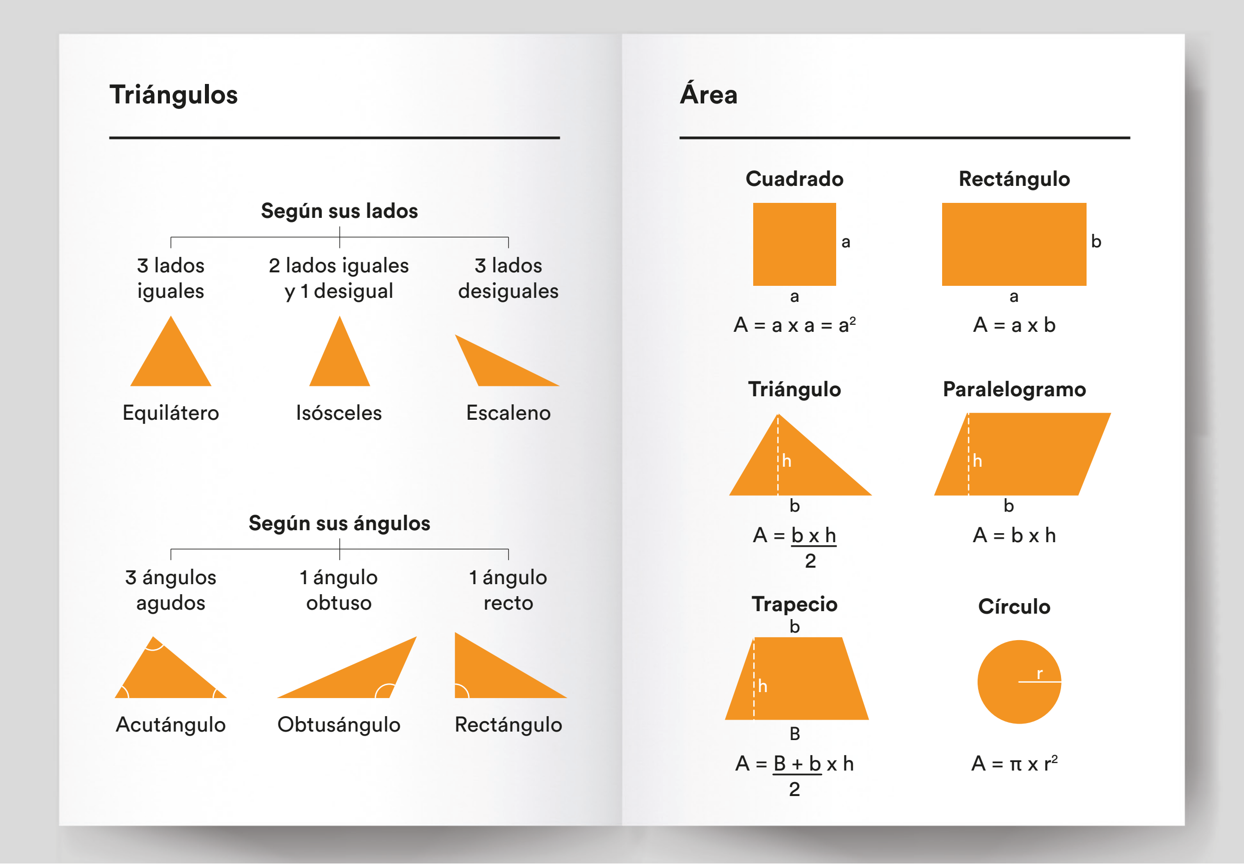
1) Un granjero quiere hacer un corral para guardar sus animales, el terreno del cual dispone se presta para construir el corral de distintas formas.

Una de las posibles formas es cuadrada, donde cada lado mide 25 m, la otra es de forma rectangular de 30 m de largo y 15 m de ancho, entonces:

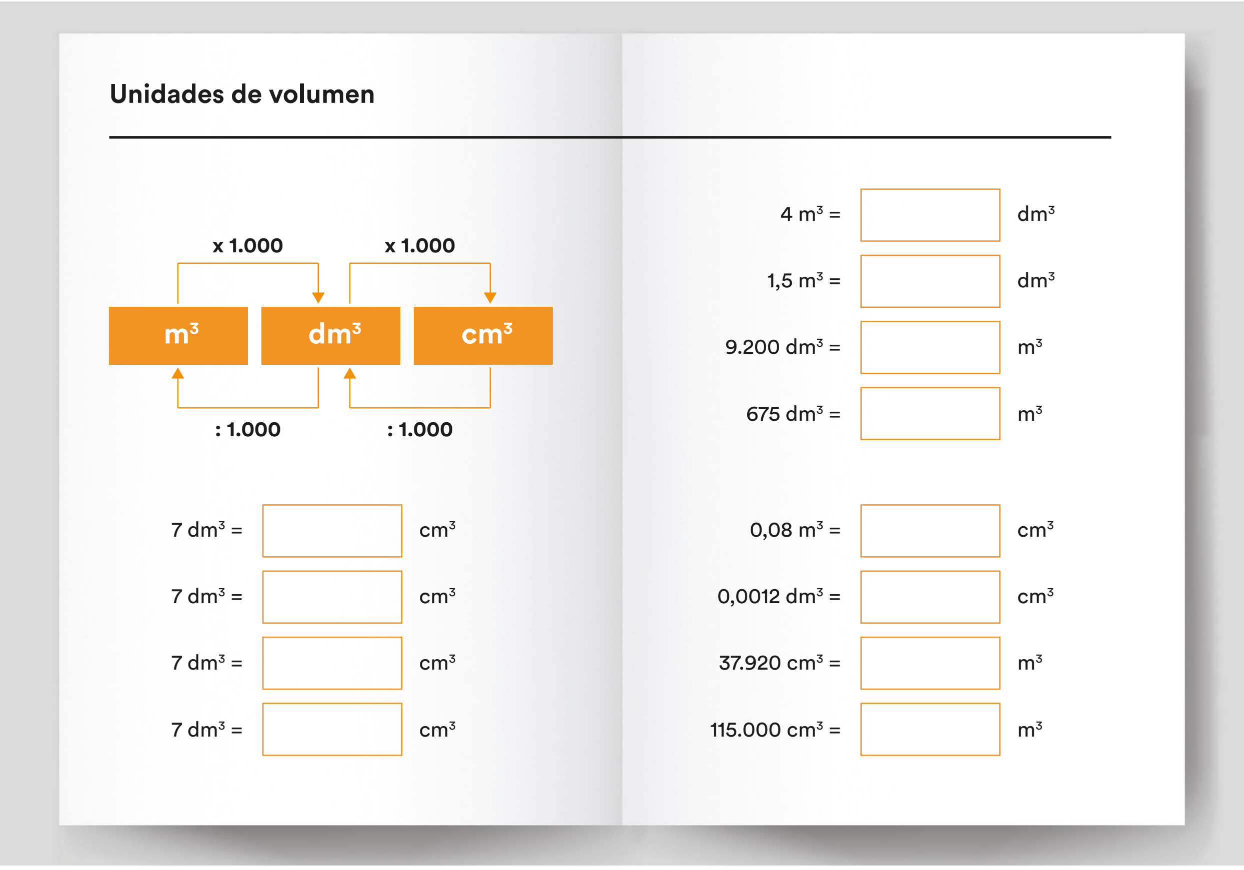
¿Cuál de estas dos formas cubre mayor superficie?

2) La diagonal de un cuadrado es de 50 cm. Calcula su área.

3) En un terreno de forma rectangular de 12 m de largo por 8 m de ancho se ha construido una piscina cuadrada de 5 m de lado. Calcula el área del terreno que queda libre.



Además, cabe señalar que el cálculo de medidas se ha convertido muchas veces en un trabajo más aritmético que geométrico, cuando se centra en la aplicación de fórmulas y la transformación de expresiones con distintas unidades. Por ejemplo:



Sin embargo, avanzar en la construcción de sentido de los conocimientos matemáticos supone, necesariamente, abordar problemas en contextos internos a la matemática y establecer la validez de afirmaciones de orden cada vez más general. Por lo cual, limitarnos solo a las aplicaciones prácticas o a un conjunto de nombres y definiciones sobre los que no se puede argumentar, no resulta suficiente.

El "hacer matemática" involucra enfrentarse a tareas que requieren producir un procedimiento de resolución, elegir qué formas de representación utilizar, decidir cómo validar los conocimientos que se van construyendo, identificar los conocimientos producidos, relacionarlos con los ya conocidos y comunicarlos. Estas prácticas matemáticas que los científicos realizan en forma autónoma, pueden realizarlas los niños en la escuela si son conducidos y acompañados por un maestro que ponga el foco tanto en las "formas de hacer matemática" como en sus resultados.

¿Qué geometría en la escuela primaria?

Si bien los conocimientos matemáticos han avanzado independizando el espacio geométrico del espacio sensible, en la escuela primaria se inicia el estudio partiendo de las formas que se perciben en el mundo, tal como se inició el conocimiento geométrico en la historia. La "geometría" que se enseña en la escuela primaria involucra el trabajo con objetos geométricos considerados como modelos del espacio físico. De este modo, se toma como punto de partida el espacio sensible en el que vive el niño —y que constituye su primer campo de experiencias— y se promueve su conceptualización como espacio geométrico.

Sobre la base del conocimiento de algunas propiedades de las formas que se obtienen de la experiencia (plegados, superposiciones) y de la reflexión sobre dibujos y construcciones de distinto tipo, se comienzan a abordar algunos problemas que permiten avanzar en los niveles de generalización, propios del mundo ideal de las figuras. Sin embargo, su desarrollo y profundización se realiza en los primeros años de la escuela secundaria.

Del mismo modo, en relación con el espacio, se avanza desde la identificación de referencias en el espacio real, a la consideración y el uso de sistemas de referencia en el plano, lo que también se profundiza en la escuela secundaria.

Se puede caracterizar entonces el trabajo geométrico a lo largo de la escuela primaria como una práctica de resolución de problemas, que se inicia con la experimentación sobre diferentes modelos, mediante acciones como superponer, doblar, y medir; y en el cual la expresión de justificaciones pragmáticas se realiza en un lenguaje coloquial. Luego, se avanza hacia la búsqueda de respuestas mediante la anticipación de las acciones y la justificación con propiedades utilizando un lenguaje más propiamente geométrico.

¿Qué aporta la historia para pensar la enseñanza de la geometría?

La Geometría como campo de la Matemática surge en el Antiguo Egipto del estudio de las formas en el mundo sensible y la necesidad de diseñar espacios y medir los terrenos.

Después de una fase experimental ligada a la resolución de problemas prácticos, los matemáticos tuvieron necesidad de predecir el resultado de experiencias sin hacerlas, sólo imaginándolas. En este proceso, los objetos sobre los que trabajaron pasaron de ser inicialmente objetos del mundo real a ser modelos de la realidad. Las preguntas y las relaciones que establecían sobre estos objetos pasaron, de apoyarse en la experiencia sobre casos particulares y en mediciones, a resolver casos análogos con procedimientos similares y luego a establecer reglas más generales.

Los griegos de la antigüedad, ya reconocieron la diferencia entre los objetos físicos y los conceptos tales como circunferencia o triángulo. Estos objetos ideales podían ser dibujados con regla y compás, con procedimientos que daban lugar al uso de las propiedades que los definían. A su vez, la tarea de validación de las afirmaciones pasó de apoyarse en las mediciones a basarse en el razonamiento sobre dibujos, ya en tiempos de Pitágoras, apareció la necesidad de justificar la veracidad de un conocimiento.

Después de Pitágoras, los trabajos matemáticos se orientaron hacia la recopilación y organización de los conocimientos que entonces circulaban y que sirvieron para que Euclides escribiera los libros denominados "Elementos" donde se registran muchas de las definiciones y propiedades que enseñamos hoy en la escuela.

La geometría avanzó desarrollando otros conocimientos como, por ejemplo, la introducción de las coordenadas para describir objetos a través de puntos que ocupan una cierta posición que se indica con números y, también surgieron nuevas reglas y propiedades derivadas de problemas puramente intramatemáticos. **Los objetos geométricos evolucionaron así desde ser concebidos como modelos de objetos o de situaciones de la realidad a objetos puramente teóricos.**

Es importante explicitar qué se entiende por problema geométrico. Una caracterización de los mismos está dada por Altman, Comparatore y Kurzrok (2009):

> (...) un problema geométrico es aquel en el cual se ponen en juego las propiedades de los objetos geométricos en su resolución, pone en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico sino a un espacio conceptualizado representado por las figuras dibujos. Estos dibujos no cumplen, en la resolución del problema, la función de permitir llegar a la respuesta por simple constatación sensorial. La decisión autónoma de los alumnos acerca de la verdad o falsedad de sus respuestas se apoya en las propiedades de las figuras y los cuerpos. Sus argumentaciones producen nuevos conocimientos sobre estos objetos geométricos (p. 4).

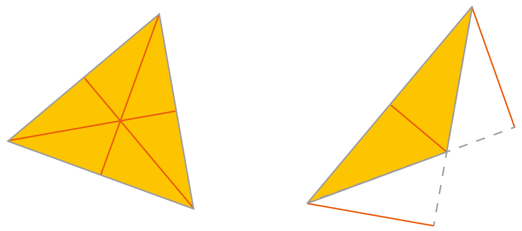
Más allá del tipo de representaciones y materiales que se usen, siempre será necesario promover los procedimientos que suponen una anticipación sobre la acción y que involucran el uso de algunas propiedades ya conocidas. Asimismo, y si bien muchas comprobaciones seguirán apoyándose en lo empírico, será necesario promover el análisis de los procedimientos para establecer relaciones y formular preguntas que lleven a explorar nuevos ejemplos, para avanzar en los niveles de generalidad de las afirmaciones que se realizan.

¿Dibujos o figuras?

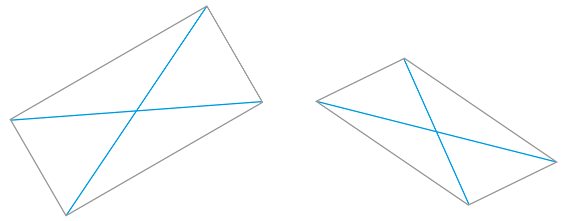
Varios documentos curriculares que retoman investigaciones didácticas de las últimas décadas señalan que, en los primeros años de la escuela, los niños asocian los objetos geométricos con los dibujos de los mismos, sin diferenciar entre esa representación —que resulta siempre particular— y los objetos mismos.

Podemos observar esto si se piensa en un problema donde se solicita a los estudiantes que dibujen un triángulo. Es posible que las respuestas que den se vean afectadas por el dibujo particular que han realizado y que lo que afirmen no sea válido “en general” para cualquier triángulo.

Por ejemplo: si se pide construir un triángulo y marcar las alturas correspondientes a los tres lados, y el alumno dibuja un triángulo acutángulo, podría suponer que las alturas son siempre interiores, lo que en general no es cierto.

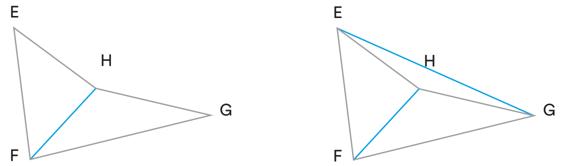


Otro ejemplo: cuando los alumnos dibujan un cuadrilátero y trazan sus diagonales, habitualmente las diagonales resultan interiores.



Esto lleva a construir la idea de que efectivamente esa es una característica propia de las diagonales, aunque esto no se explicite nunca.

Cuando se pide a los alumnos que marquen las diagonales en el cuadrilátero FEHG, la respuesta que aparece es el segmento $\overline{FH}$, lo que es coherente con la idea de diagonal construida. Sin embargo, el segmento $\overline{EG}$, que tiene como extremos vértices no consecutivos es también una diagonal.



Esto se debe a que, habitualmente, el repertorio de casos, ejemplos y dibujos que se usa cuando se trabaja con cuadriláteros, corresponde a cuadriláteros convexos. En este sentido, la inclusión de figuras cóncavas en este repertorio, o de figuras cuyo nombre no se conoce, contribuye a generar contrastes y a precisar ideas.

A su vez, es interesante mencionar que el uso de *no ejemplos*[1] en la enseñanza de la geometría permite expresar las características de un objeto que lo distinguen de otros. Con lo cual los estudiantes pueden desarrollar a partir de estas características, experiencias de reflexión en torno a un concepto en particular. Esto promueve, además, que los niños visualicen, exploren y analicen las representaciones de las figuras con las cuales se trabaja.

Asimismo, los dibujos que aparecen en los textos muchas veces mantienen posiciones y proporciones estereotipadas, lo que tampoco contribuye a independizar lo que muestra un dibujo particular de las propiedades de una figura.

1. Recuperado de Tall (1989). *Concept images, computers and curriculum change. For the Learning of Mathematics*, 9(3), 37-42.

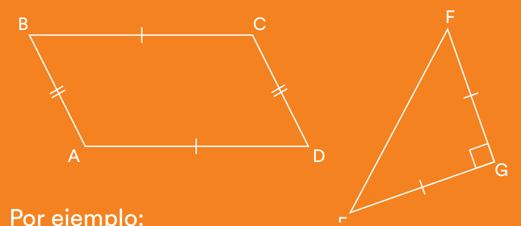
En el caso de estos ejemplos, ni la posición, ni las proporciones relativas entre los lados, son propiedades de las figuras pero sí una característica particular de estos dibujos.

En el caso de los cuerpos, es frecuente que, por ejemplo, se elija una lata como un modelo adecuado para un cilindro pero no una moneda.

De este modo lo que se ve en el dibujo, o en un modelo, depende de lo que el sujeto sabe a partir de las experiencias que ha tenido y, lógicamente, varía de un alumno a otro. Ampliar el conjunto de ejemplos, de materiales, de posiciones y tamaños en las que se presentan los dibujos, será importante entonces para avanzar en la conceptualización de los objetos geométricos.

¿Qué información aportan las notaciones?

En el marco geométrico además de dibujos, se utiliza una “notación” con letras que permiten diferenciar los diferentes elementos de un mismo tipo: por ejemplo, sus vértices, lados, ángulos, diagonales, etc., y algunas propiedades, como cuando se marcan lados iguales o ángulos rectos.



Por ejemplo:

La notación ABCD para los vértices de un paralelogramo permite indicar claramente a cuál de las diagonales se refiere $\overline{AC}$ ó $\overline{BD}$.

Asimismo esta notación permite expresar las relaciones entre diferentes objetos haciendo uso de nuevos símbolos para acortar la escritura, por ejemplo:

"a es paralela a b" se escribe a//b y "a es perpendicular a b" se escribe $a \perp b$

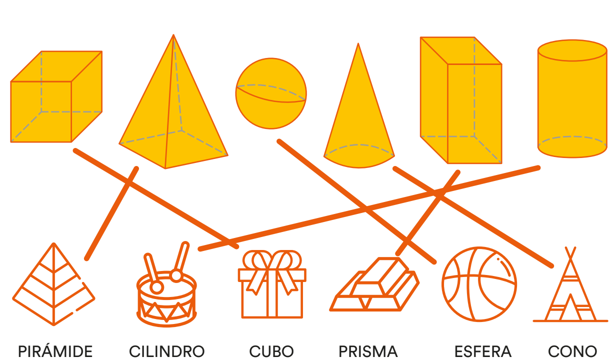
El vocabulario y las notaciones correspondientes se irán incorporando en la medida en que sea necesario en función del problema que se esté resolviendo. Es decir, si se trata sólo de dibujar un cuadrado no hará falta poner nombre a los vértices, pero si se trata de comunicar a otros alguna característica de esta figura, tendrá sentido hacerlo.

¿Definir antes de hacer o arribar a la definición?

Otra cuestión que será importante considerar, en relación con el enfoque de enseñanza que se viene planteando, es cómo seleccionar problemas que otorguen sentido a los conocimientos que se enseñan estimulando una actividad de producción en la clase.

En relación con el uso de contextos extramatemáticos, exige al docente ser muy cuidadoso al elegir las situaciones, pues en muchos casos pueden resultar forzadas o poco significativas ya que la posibilidad de vincular una forma geométrica con un objeto real no implica, necesariamente, usar conocimientos matemáticos.

LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS



Para preguntarnos: ¿qué saben los chicos acerca de los distintos cuerpos geométricos después de realizar esta actividad y qué no sabían antes?

En el campo de los problemas intramatemáticos, cabe señalar que no hace falta definir los conceptos de punto, recta, plano, ángulo para iniciar el trabajo en geometría, y no es necesario tampoco conocer los nombres de las figuras para resolver un problema de construcción.

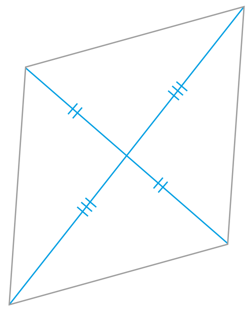
Es justamente al enfrentarse a problemas que involucren distintas formas, o la ubicación de distintos objetos o representaciones, que se irán construyendo las nociones geométricas involucradas en esos problemas, pudiendo así atribuir sentido a lo que se hace.

De acuerdo a Winicki Landman (2006), existe una diferencia entre definir como proceso y definición como producto. El autor expresa que un futuro profesor debe tener oportunidades que le permitan reflexionar acerca de los roles que las definiciones cumplen en el desarrollo de las matemáticas, la definición como objeto y el definir como proceso, los factores que influyen en la elección de una proposición como definición de un concepto matemático y las consecuencias de esta elección. Esto invita a pensar sobre el lugar que se le da en las clases de matemática a que los estudiantes desplieguen un proceso de elaboración de definiciones.

¿Una sola manera de clasificar?

En relación con el lugar de la definición en el trabajo geométrico es importante tener en cuenta, entre otras cuestiones, que **todo objeto matemático admite varias definiciones posibles**.

Por ejemplo, es posible considerar diferentes definiciones de rombo:



Un rombo es *"un paralelogramo cuyas diagonales son perpendiculares y se intersectan en sus puntos medios".*

A partir de esta definición, se puede demostrar como una propiedad de esta figura que sus lados son congruentes[2].

Para eso es necesario considerar que los cuatro triángulos que quedan determinados en la figura son rectángulos y que además tienen dos catetos congruentes (*//* y *///*). Por lo tanto, teniendo en cuenta uno de los criterios de congruencia de triángulos, se puede asegurar que también van a tener sus hipotenusas (los lados del rombo) congruentes. Si, en cambio, se considera que:

"un rombo es un paralelogramo con cuatro lados congruentes",

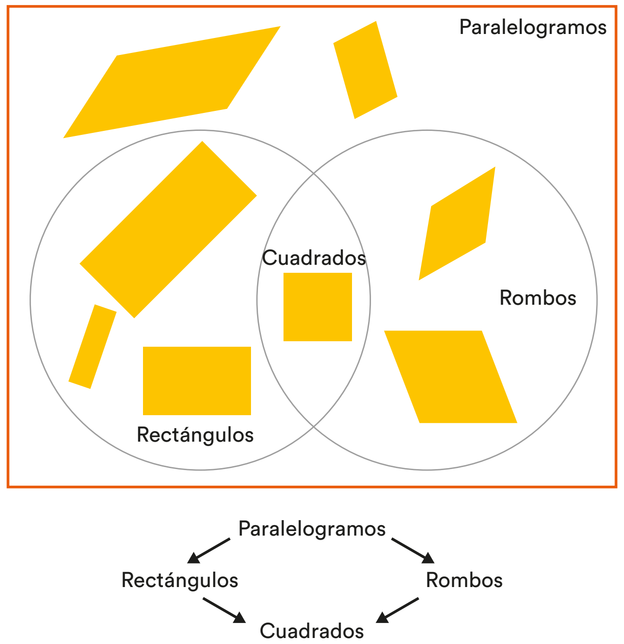
se podría deducir como propiedad que sus diagonales son perpendiculares. Es posible demostrarlo considerando las diagonales de la figura y usando propiedades ya conocidas de los paralelogramos y los triángulos.

A su vez, hay distintas formas de clasificar que están en íntima relación a las definiciones de las figuras que se consideren.

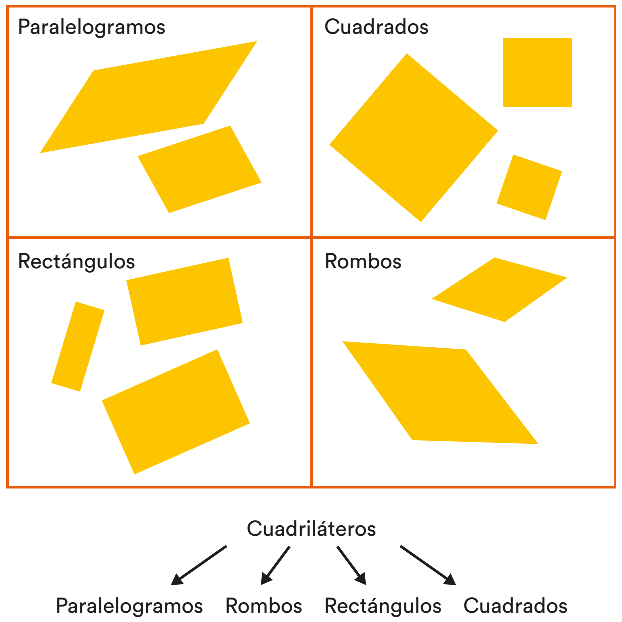
Por ejemplo, si se define un paralelogramo como un cuadrilátero de lados opuestos paralelos, pero sin ángulos rectos, se excluye a los rectángulos. Esto da origen a una clasificación particional, donde las categorías no tienen elementos en común.

En la clasificación jerárquica, que usamos habitualmente, el paralelogramo se define como un cuadrilátero con lados opuestos paralelos. Como el rectángulo cumple con esa condición, es un paralelogramo especial. Esto genera, más que una clasificación estricta, una jerarquía de cuadriláteros con clases inclusivas.

En el siguiente cuadro[3] se contrasta una clasificación jerárquica de paralelogramos, rectángulos, rombos y cuadrados, con una clasificación particional:



Jerárquico



Particional

2. Estrictamente, cuando nos referimos a dos figuras que pueden superponerse punto a punto –esto es, dos figuras que tienen las mismas medidas para todos sus elementos– usamos el término "congruente", aunque coloquialmente decimos "iguales". Esta diferenciación de vocabulario no es sustantiva en los primeros años de la escuela y puede incluirse en los últimos años si se considera oportuno.
3. Este cuadro fue extraído de De Villiers, M. (1993).

Es de suma importancia tener en cuenta esta diferencia ya que cuando los alumnos dicen "paralelogramo", "rombo" o cualquier otro nombre, podrían estar pensando en figuras diferentes en función de las propiedades que conozcan y las relaciones que hayan podido establecer entre ellas.

Otra cuestión a considerar es que el verbo "ser" puede indicar tanto la identidad: "un cuadrado es un rombo con un ángulo recto", o la inclusión: "un cuadrado es un rectángulo". De modo similar en "un cuadrado es un rombo con un ángulo recto", el primer "un" es un artículo indeterminado y el segundo debe entenderse como un cuantificador, en particular en este caso: "al menos un ángulo recto".

Otro ejemplo que muestra la importancia de estar alerta al uso de cuantificadores es el siguiente: si se considera que todos los triángulos equiláteros son parte de una clase, y luego se piensa en la relación con la clase de los triángulos isósceles, es posible preguntar: ¿cuál es esa relación? ¿son clases diferentes? Las respuestas a estas preguntas dependen de qué definiciones de triángulo equilátero e isósceles se están considerando. Si se considera que es isósceles el triángulo que tiene "al menos dos lados iguales", entonces un triángulo equilátero es también isósceles y la clase de los equiláteros está incluida en la de los isósceles. Es importante entonces estar alerta al uso de los cuantificadores "al menos uno", "todos", "uno", etc.

En síntesis

Este tipo de reflexiones fortalece la idea de que, más que priorizar las definiciones y clasificaciones de las figuras geométricas, es importante presentar problemas que den lugar a preguntarse por sus propiedades, por las formas de nombrarlas y por las relaciones que se pueden establecer.

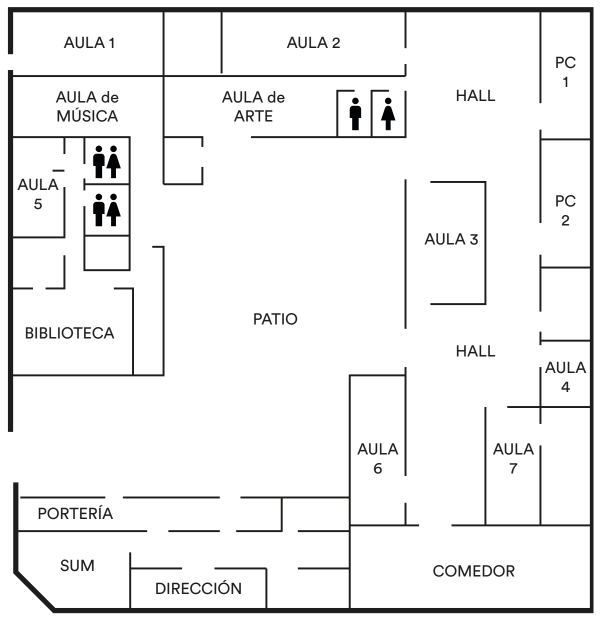
En la clase de primaria, es importante ir incorporando desde el primer ciclo el trabajo con las propiedades que caracterizan las figuras y recién en el segundo ciclo avanzar con las relaciones entre dos clases de figuras (rombos y cuadrados, isósceles y equiláteros, cuadriláteros y paralelogramos, etc.) sin incorporar, necesariamente, clasificaciones más complejas.

Será un propósito de la enseñanza en la escuela primaria lograr que los alumnos vayan concibiendo las figuras como tales, es decir, asociando a cada objeto geométrico un conjunto de propiedades que lo caracterizan y avanzando con los tipos de pruebas que proporcionen sobre las afirmaciones que realicen.

La construcción de las relaciones espaciales en la escuela

¿Qué factores intervienen en su aprendizaje?

En la introducción se plantearon algunas preguntas y cuestiones generales acerca de la enseñanza de la Geometría en la escuela primaria. Ésta se centrará en el abordaje de los problemas que requieren ubicar y describir posiciones de objetos en el espacio físico y en distintas representaciones.



Para pensar en cómo organizar propuestas de enseñanza que permitan a los niños y niñas avanzar en sus posibilidades de interpretar y comunicar relaciones espaciales, tanto en el espacio sensible como en el representado, será necesario tener en cuenta algunas consideraciones acerca de este tipo de aprendizaje.

En principio, es necesario señalar que a lo largo de su crecimiento los niños van explorando el espacio que los rodea y estableciendo relaciones entre los objetos que manipulan en su entorno cotidiano. Estas experiencias pueden ser más o menos ricas y desafiantes, en espacios más o menos amplios y variados, con más o menos interacciones que requieran verbalizar esas relaciones y, consecuentemente, los conocimientos que van construyendo fuera de la escuela pueden ser muy diferentes. Muchos estudios señalan que las capacidades espaciales de los individuos son muy variables según las distintas sociedades y épocas, lo que depende, evidentemente, de las características y oportunidades tanto del entorno físico como social. En ese sentido, será importante ofrecer una amplia gama de propuestas que permitan a los estudiantes incrementar sus marcos de referencia para la ubicación espacial de sí mismos, de otras personas y de distintos objetos, con actividades que los desafíen y los lleven a tomar decisiones en paralelo con el desarrollo de una creciente autonomía personal. Asimismo, habrá que realizar actividades en las que se pongan en juego las nociones espaciales y se reflexione sobre las acciones realizadas de modo de dar lugar a la explicitación de las relaciones descubiertas.

Para desarrollar estas propuestas es necesario tener en cuenta que, como lo señalan algunos trabajos de Grecia Gálvez (1985) y Guy Brousseau (2000), pueden darse distintas acciones y aprendizajes en función del "tamaño" del espacio:

- El **microespacio**, accesible a través de la manipulación y de la vista, en el que es posible que el mismo sujeto cambie de punto de vista o desplace los objetos, controlando los efectos de sus acciones. El sujeto no tiene ninguna necesidad de elaborar representaciones o modelos de lo que sucede en el microespacio dado que la información que usa parte de sus propias acciones sobre el espacio sensible, de acceso directo.

- El **mesoespacio**, en el que los objetos fijos son los puntos de referencia que utiliza el sujeto para orientarse en sus desplazamientos. Esto requiere progresivamente de la integración de los distintos puntos de vista que el sujeto va teniendo en sus desplazamientos. Comienzan a cobrar sentido las direcciones, los cambios de dirección y las distancias.

- El **macroespacio**, que el sujeto no puede percibir globalmente, e involucra la integración de puntos de referencia que ayuden a estructurar un espacio que no es totalmente accesible de modo directo. Esto requiere coordinar el sistema de referencia corporal (delante-detrás, derecha-izquierda) con un sistema de referencia externa al sujeto que no varíe con sus desplazamientos.

De este modo, no se recomienda proponer a los estudiantes del segundo ciclo actividades que involucren el trabajo con planos cuando no se esté seguro de que antes hayan realizado ellos mismos distintos trayectos en su espacio inmediato y los hayan comunicado, identificando primero referencias independientes de su propio cuerpo para avanzar luego en su representación. Este proceso requiere varios años de intervenciones sistemáticas por parte de la escuela, desarrolladas en espacios de distintos tamaños.

Para reflexionar:

¿Qué tipo de experiencias en relación con la exploración de distintos "tamaños" de espacios tienen sus alumnos? ¿Y usted mismo?

¿Qué referencias son habituales en su entorno para indicar un recorrido? ¿Hay puntos claves que todos los habitantes del lugar conocen?

¿Han tenido, usted o sus alumnos, la necesidad de orientarse en un lugar no explorado previamente a partir de un mapa? ¿Qué dificultades se presentaron?

¿Cómo hacer avanzar los conocimientos de los niños?

Desde su ingreso a la escuela los niños deberán enfrentarse con situaciones en las que les sea necesario recurrir a referencias para ubicar personas y objetos al realizar acciones en el espacio real, para luego pasar al espacio representado. Estas referencias primero estarán asociadas a los distintos puntos de vista del observador, pero luego deberán independizarse del mismo. Para ello, será importante promover situaciones de comunicación en las que haya que describir un trayecto para orientar a otra persona, dar indicaciones para encontrar un objeto, comparar distintos croquis, etc., poniendo en evidencia que distintos sujetos, en distintas posiciones, pueden describir un trayecto o la posición de un objeto de manera diferente. Primero es necesario advertir estas diferencias para, luego, avanzar estableciendo relaciones entre objetos independientes de la posición del sujeto que observa y, más adelante, hacerlo en el uso de sistemas de referencias convencionales como mapas o planos.

Las primeras exploraciones podrán realizarse a través de actividades que involucren adivinanzas, búsquedas del tesoro, veo-veo, elaboración y comunicación de recorridos en distintos espacios, apoyadas fundamentalmente en la exploración efectiva del espacio y la comunicación oral[4].

Luego se avanzará en el trabajo de interpretación de fotografías y representaciones gráficas, desde las imágenes más cercanas a la apariencia del objeto representado hacia otras convencionales.

Asimismo, es importante mencionar que el tipo de contexto también hará que el uso de referencias responda a las particularidades del espacio que se explora. Por ejemplo, en algunos espacios rurales puede no haber muchas referencias convencionales y los alumnos se apoyan en referencias ligadas a sus experiencias personales. En espacios urbanos, las distintas formas de planificación de las ciudades ofrecen un sistema de referencias y códigos que es necesario aprender a interpretar. Tal como se señala en el Cuaderno para el Aula, Matemática 5 (2007):

> Podríamos suponer que la producción de un croquis de un paraje rural que no se conoce es una tarea difícil para algunos niños de la ciudad y del mismo modo podría ocurrir con los alumnos de un determinado paraje rural al hacer un croquis de un itinerario de la ciudad. Sin embargo, todos pueden realizar tareas de interpretación de dichas representaciones, aunque describan espacios desconocidos (p.128).

A través de este tipo de actividades se promueve que los estudiantes avancen hacia la interpretación y producción de orientaciones y referencias cada vez más comprensibles.

A lo largo de esta publicación, se ofrecen propuestas para trabajar en aulas con modalidad plurigrado. Para una mejor comprensión, les presentamos las referencias gráficas y la descripción de cada grupo de alumnos para realizar las propuestas presentadas:

Para los más chicos, que están en el primer ciclo. Para los que recién se inician con el tema de enseñanza aunque sean más grandes.

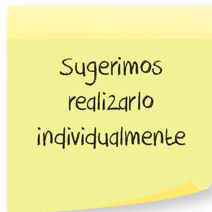
Para los que están iniciando el segundo ciclo. Para los que ya conocen algo del tema pero tienen alguna dificultad. Para los que necesitan fortalecer sus conocimientos antes de avanzar.

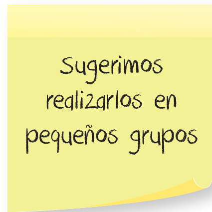
Para los alumnos que están avanzando en el segundo ciclo.
Para los que pueden profundizar.

Estas referencias por color no deben interpretarse como niveles sucesivos, sino como alternativas flexibles ya que lo que es fácil para un alumno puede ser difícil para otro, y sólo el maestro puede determinar qué actividad resulta adecuada para cada uno. Un alumno que para una actividad está en el grupo anaranjado podría trabajar luego en el grupo rojo o viceversa, en función de sus conocimientos.

En algunos casos, para el mismo color también se ofrecen alternativas, ya que es posible que en un primer momento todo el grupo trabaje con una misma consigna y luego se organicen subgrupos.

Encontrarán en las propuestas íconos que sugieren que el trabajo en esas actividades sea en pequeños grupos o de forma individual. Cabe aclarar que estos íconos, solamente presentan una sugerencia y que cada docente debe planificar con libertad la gestión de su clase.





¿Cómo secuenciar el trabajo en cada ciclo?

Para el primer ciclo el trabajo se centrará, fundamentalmente, en ampliar y problematizar las experiencias vividas por los alumnos en su entorno social para avanzar en la ubicación de personas y objetos en el espacio y describir trayectos en distintos espacios. Se debe trabajar en la comunicación e interpretación de un recorrido de forma oral y también lograr ponerse de acuerdo con otros durante la planificación y confección de un esquema para un recorrido (ver Propuesta 1).

Es recomendable incorporar paulatinamente espacios nuevos, de mayores dimensiones, para avanzar luego en el dominio de la organización social de esos espacios. Por ejemplo, para comprender la distribución y organización de las calles (direccionalidad y numeración) en una ciudad pequeña o un barrio de una ciudad más grande. Finalizando el primer ciclo, se suma la noción de ángulo como "giro" o cambio de dirección para describir un recorrido. En este sentido, incluir los puntos cardinales puede ser un buen apoyo (ver Propuesta 2).

En el segundo ciclo la progresión se orientará fundamentalmente a avanzar en las representaciones y su interpretación, teniendo en cuenta las relaciones espaciales entre los elementos representados para comunicar información sobre el espacio cotidiano y sobre otros espacios conocidos a través de sus representaciones. Los distintos planos y sus diferentes referencias, los croquis, las hojas de ruta, entre otros, son instrumentos fundamentales sobre los cuales pensar las actividades. También es necesario avanzar en la identificación de códigos de señalización en distintos mapas e interpretar algunos planos sencillos. Es importante llegar a la conclusión de que sin importar el punto de referencia desde el cual se haga la representación, los objetos tienen determinada ubicación y debe ser respetada, lo que a su vez llevará a poner en juego algunos conocimientos sobre escalas. Asimismo, habrá que presentar sistemas de referencias convencionales tanto a partir del estudio de trazados urbanos como de ejes de coordenadas.

4. Se pueden encontrar distintas propuestas en la serie Cuadernos para el aula de Matemática. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, Consejo Federal de Cultura y Educación (2006-2007). Cuadernos para el aula: Matemática. Buenos Aires: Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación. http://repositorio.educacion.gov.ar/dspace/handle/123456789/96737

Propuesta 1
Las relaciones espaciales y sus representaciones

¿Qué miramos para describir dónde está un objeto?

1 Encontrá las 5 diferencias:

2 ¿Dónde está la libreta?

Buscá un recorte de papel para usar como libreta y ponelo en la foto en distintas ubicaciones.

a Suponé que estás sentado en el banco que tiene el cuaderno verde, y ubiquen la libreta:
- sobre el mueble que está entre la ventana y el pizarrón;
- a la derecha del cuaderno verde;
- sobre el escritorio, a la derecha;
- en el banco que está a la izquierda.

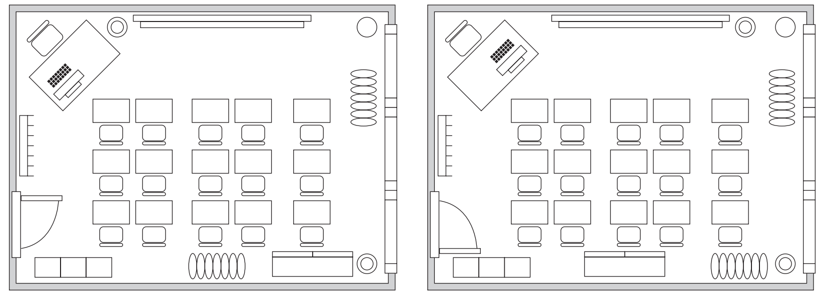
b Si ahora están sentados en el escritorio de la maestra, mirando a la clase, y usan las mismas indicaciones, ¿la libreta queda en los mismos lugares? ¿En qué casos? ¿Por qué?

c Con otro grupo o con un compañero, hagan turnos para ubicar la libreta: uno dice dónde va y el otro la ubica.

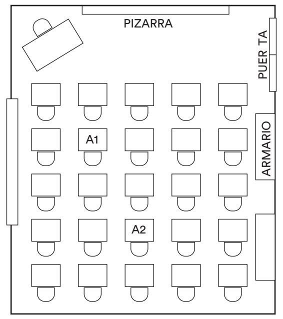
Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

¿Qué referencias usamos cuando ubicamos objetos en un plano?

1 Encontrá las 5 diferencias:



2 Considerá este plano de un aula dibujado y describí la ubicación del pizarrón:



a al entrar por la puerta;

b al mirar por la ventana;

c desde el escritorio.

3 Considerando el mismo plano que la actividad anterior, respondan las siguientes preguntas:

a Si un chico dice que se sienta en la tercera fila, en el segundo banco. ¿Podrían saber con seguridad cuál es su lugar?

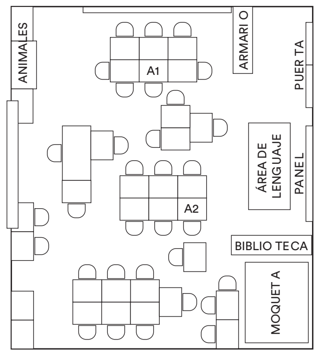
b ¿Cómo describirían las ubicaciones del alumno A1 y del alumno A2?

c Con otro grupo, o con un compañero, hagan turnos para ubicar uno de los bancos: uno describe la ubicación y el otro descubre cuál es.

d ¿Qué tuvieron en cuenta para describir la ubicación de cada uno de los bancos? Registren distintas formas de hacerlo.

para trabajar en parejas o en pequeños grupos

4 Si ahora el aula tuviera esta distribución: ¿cómo cambiarían las respuestas a las preguntas anteriores?



para trabajar en parejas o en pequeños grupos

¿Cómo ubicamos puntos y figuras en un plano de coordenadas cartesianas?

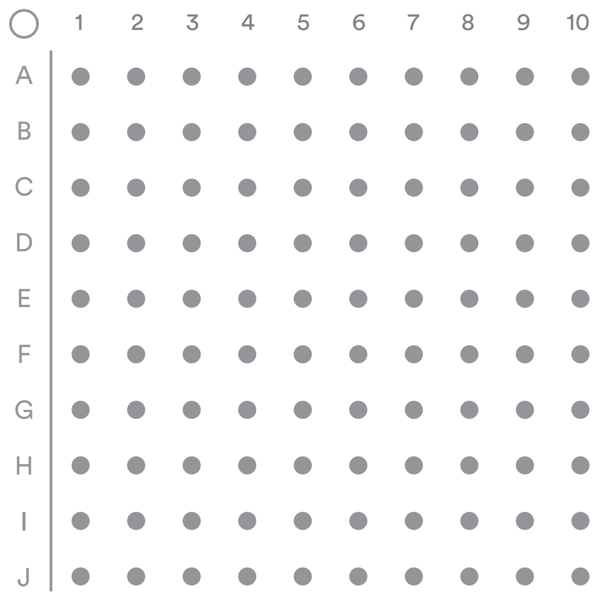
1 Encuentren las figuras:

Cada equipo tiene dos tableros como el siguiente y traza, en uno de los tableros, tres figuras que sean cuadrados. Cada una de las figuras debe tener desde uno y hasta cuatro puntos interiores y no pueden tocarse ni superponerse.

El objetivo es descubrir dónde están ubicadas cada una de las tres figuras que dibujó el otro equipo. Para eso, por turno, los jugadores van diciendo posiciones y anotando en el segundo tablero la característica de ese punto según sus contrincantes respondan “vértice” o “lado”; en el caso de que un punto no sea ni vértice ni lado, contestarán “interior” (cuando sea interior a la figura) o “nada” (si no pertenece a ella).

Gana el jugador que primero descubra la posición exacta de las tres figuras. Se entiende por posición exacta, conocer la ubicación de los cuatro vértices. También pueden jugar con otras figuras.

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos



2 Después del juego:

a En cada caso, completá las referencias de los puntos que faltan, para que ABCD sea un cuadrado.

- A=(E;10); B=(E;7); C=(...;...) y D=(...;...)
- A=(I;3); B=(H;4); C=(...;...) y D=(...;...)

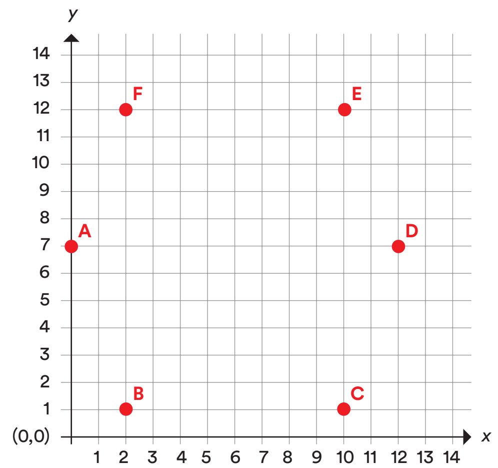
b ¿Cuántas posibilidades distintas hay en cada caso?

c Si ahora se trata de dibujar un rectángulo MNPQ, ¿qué puntos podrían ser N y Q?

M= (D;3); N= (...;...); P= (F;6); Q= (...;...)

3 Usar un sistema de coordenadas:

Una forma muy utilizada en Matemática para ubicar puntos en el plano, es el sistema de **coordenadas cartesianas ortogonales**. Éste está formado por un par de ejes perpendiculares sobre los que se define un segmento unidad y, en forma equidistante, se representan los números. Es decir, son dos rectas numéricas que se intersectan en un punto llamado origen del sistema. El eje horizontal es llamado eje de abscisas y el eje vertical, eje de ordenadas. Por ejemplo:



Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

a ¿Cómo describirían la ubicación de los puntos B, C, E y F?

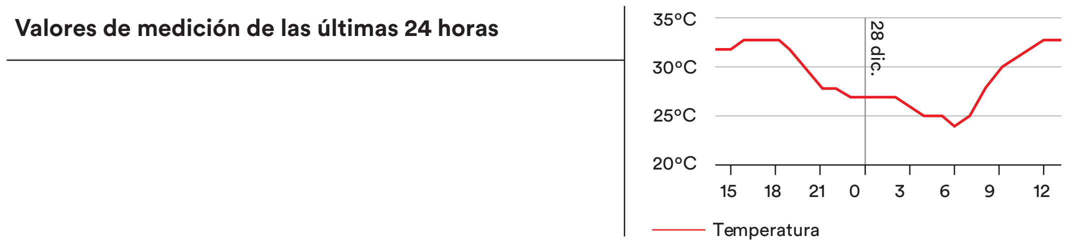
b ¿En qué se parecen las ubicaciones de F y B? ¿Y de F y E?

c ¿Qué figura se forma uniendo estos puntos? ¿Cómo se dan cuenta?

d Si alguien quiere ubicar un punto ¿da lo mismo decir primero 2 y después 5 que hacerlo en el orden inverso? ¿Por qué?

e ¿Cómo podrían ubicar los puntos para que se forme un cuadrado?

4 Este tipo de representación también se usa frecuentemente en gráficos:



a ¿Qué indica cada una de las escalas?

b ¿A qué valor corresponde la distancia entre dos puntos, en cada una de las escalas?

c ¿A qué hora se registró la temperatura máxima? ¿Y la mínima? ¿Cuáles fueron sus valores?

d ¿Cuántos grados bajó la temperatura entre las 18 y las 0 horas?

e ¿Cuántas horas se mantuvo una temperatura de menos de 30º?

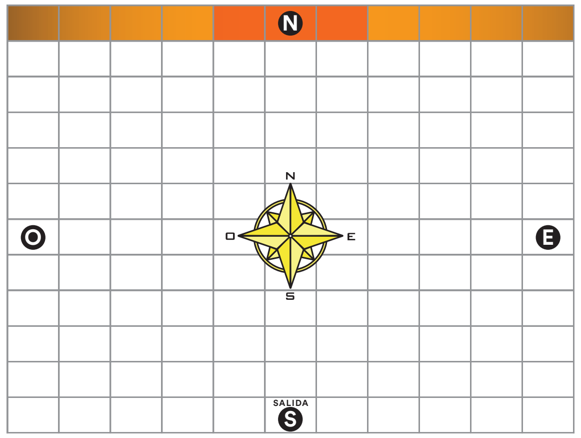
Propuesta 2
El juego de los puntos cardinales

Materiales comunes a todas las versiones:
- un dado que en sus caras contenga los puntos cardinales (N, S, E, O) y dos comodines (★);
- un dado numerado con 1, 2, 3, 4, 2, 3;
- un tablero como el de la figura;
- cuatro fichas o semillas para cada jugador.

Del Sur al Norte

Reglas de juego:

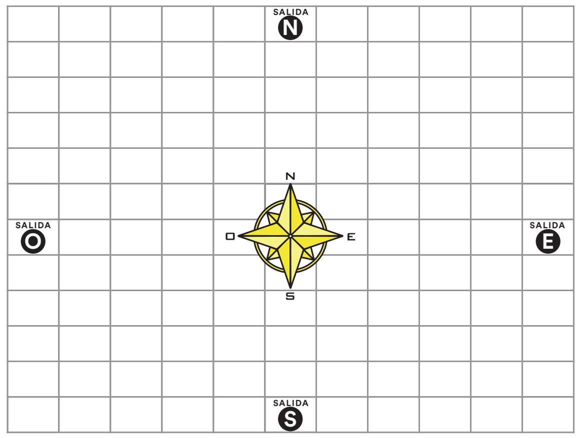
Todos los jugadores se ubican frente al tablero mirando hacia al Norte y salen, por turnos, desde la casilla Salida en el Sur. Cada uno tira los dos dados y debe avanzar en la dirección que indica el dado de puntos cardinales, la cantidad de casilleros que indica el dado numerado.
Cuando sale el comodín (★) el jugador elige en qué dirección se mueve.
Si el movimiento no se puede hacer, se pierde un turno.
Si el jugador considera que el movimiento lo aleja mucho de su objetivo puede elegir “pasar” sin mover en 3 oportunidades.



También se puede terminar el juego si, luego de 10 rondas, nadie llegó a la meta. En ese caso gana el que está más cerca.

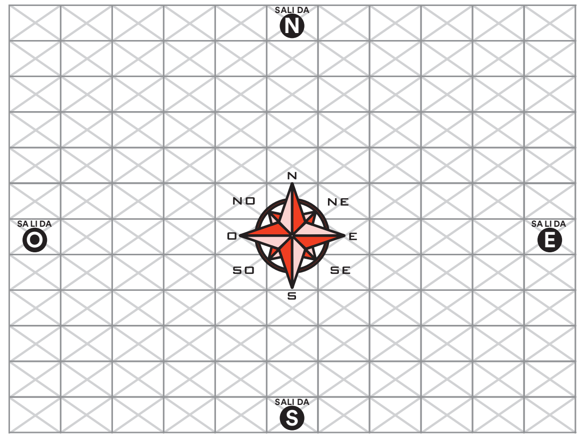
Más puntos cardinales

En esta versión, se modifica el tablero y cada jugador se ubica en una de las salidas. Es decir, salen desde una posición distinta y deben orientarse por la Rosa de los Vientos central.



Avanzando en todas las direcciones

En esta última versión, también se modifica el tablero y los jugadores se ubican en cuatro salidas diferentes. Hay una variación en las reglas del juego, con respecto a las versiones anteriores: al obtener el comodín en uno de los dados, deben elegir en qué dirección moverse entre NO, NE, SE y SO.



¿Quién gana?
Para cada una de las versiones anteriores, es posible plantear diferentes metas, que indican distintos desafíos en el sentido de las estrategias y saberes que involucran:

Posibles versiones	
	Versión 1 Gana el primer jugador que llega a algún casillero de la banda norte. **Versión 2** Gana el primer jugador que llega a algún casillero rojo de la banda norte.
	Versión 1 Gana el primer jugador que llega a la banda opuesta. **Versión 2** Gana el primer jugador que llega a la salida opuesta. **Versión 3** Se colocan 4 fichas en la Rosa de los Vientos y hay que pasar por esa ubicación y levantar la ficha para poder seguir hasta la salida opuesta.
	Versión 1 Gana el primer jugador que llega a la salida de la banda opuesta. **Versión 2** Se colocan 4 fichas en la Rosa de los Vientos y, hay que pasar por esa ubicación y levantar la ficha para poder seguir hasta la salida opuesta.
También se puede terminar el juego si, luego de 10 o 15 rondas, nadie llegó a la meta. En ese caso gana el que está más cerca.	

Cabe aclarar que en las versiones anaranjada y roja, el Norte no es “hacia delante” para todos los jugadores y pasar a recoger una ficha por el centro obliga a los jugadores a anticipar recorridos y tomar decisiones para orientar su movimiento.

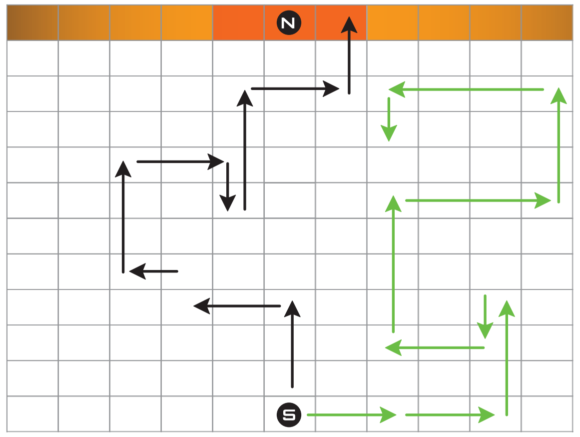
Después de jugar

Juego Del Sur al Norte

2 Seguí los recorridos de Sonia y Roberto. ¿Podés saber si alguno de los dos ganó? ¿Por qué?

Sonia:	3N	2E	2N	1O	3N	3( )
Roberto:	2O	3N	1O	2E	4N	2N

3 ¿Qué salió en los dados si los chicos hicieron estos recorridos?



4 Yesi tiró 4 veces y se enojó porque volvió a la salida. Si la primera vez le salió 2N y la segunda 2E, ¿qué piensan que pudo haber salido en las dos tiradas siguientes?

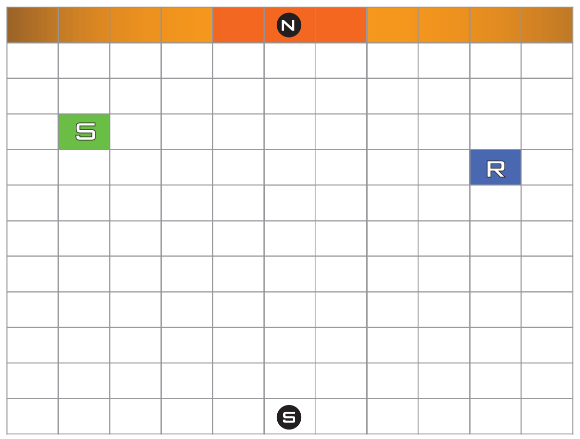
Sugerimos realizarlos en pequeños grupos

5 Jugando a la segunda versión

a En el tablero están marcadas las posiciones a las que llegaron Sonia y Roberto. ¿Podrían llegar a la banda roja en dos o tres tiradas? ¿Qué podrían sacar?

b Sonia dice que ella siempre elige Norte cuando sale el comodín. ¿Les parece que es una buena decisión? ¿Por qué?

c Roberto dice que si sale primero Este y después Oeste, no se avanza nada aunque saque 4 las dos veces. ¿Les parece que tiene razón?



Juego: Puntos Cardinales 1

2 **a** Marcá los recorridos de Luca y Paz

Saliendo desde O Luca:	2N	3N	2E	2N	1O	3N
Saliendo desde S Paz:	2O	3E	2N	1E	2N	4E

b ¿Podés saber si alguno de los dos ganó? ¿Por qué?

3 Paz propone hacer una ronda distinta, se tiran los dados y todos avanzan según lo que sale.

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

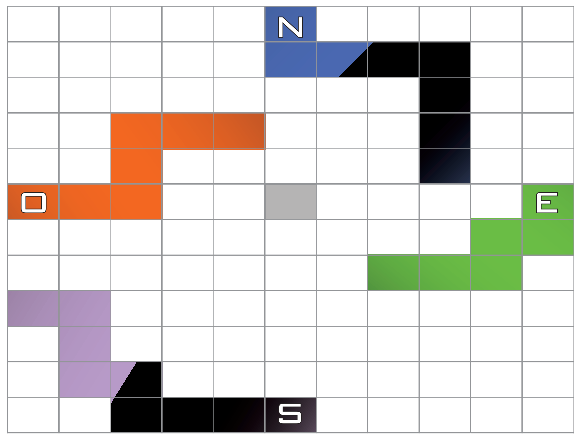
a Luca dice que no va a ser divertido porque todos van a llegar a la meta a la vez. ¿Piensan que tiene razón?

b Jueguen con esa nueva regla para comprobarlo.

c Anoten qué dirección tiene que salir en el dado para que los jugadores avancen hacia su meta:

Si el jugador sale del Sur, para avanzar tiene que salir ....
Si el jugador sale del Norte, para avanzar tiene que salir ....
Si el jugador sale del Este, para avanzar tiene que salir ....
Si el jugador sale del Oeste, para avanzar tiene que salir ....

4 Jugando a la tercera versión.
Miren los recorridos y anoten qué podría sacar cada jugador en las dos tiradas siguientes para poder tomar su ficha en el centro del tablero:



Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

Más Puntos Cardinales

2 **a** Marcá los siguientes recorridos:

b ¿Podés saber si alguno de los dos va a ganar? ¿Por qué?

Saliendo desde N:	2S	3E	2SE	2O	3SO	2S
Saliendo desde E:	2O	3S	3NO	1N	1O	2SE

3 Marcá los siguientes recorridos:

En los dados salió 3S y el jugador se movió hacia su derecha
En los dados salió 3S y el jugador se movió hacia adelante
En los dados salió 3N y el jugador se movió hacia su izquierda
En los dados salió 3E y el jugador se movió hacia su izquierda

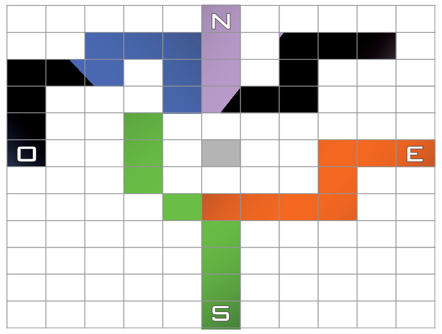
Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

4 Miren los recorridos de los distintos jugadores:

a Marquen a qué casilla llega cada uno si en los dados sale 1 S

b Registren en qué dirección le convendría avanzar a cada jugador si sale ★

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

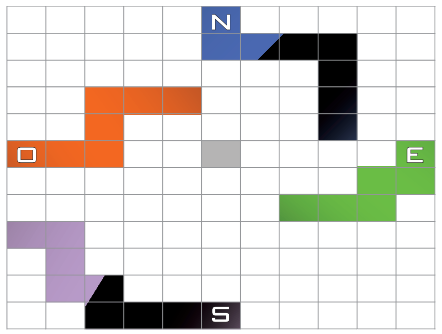


5 Jugando a la segunda versión

a Miren los recorridos y anoten qué podría sacar cada jugador en las dos tiradas siguientes para poder tomar su ficha en el centro del tablero.

b Si saliera el comodín, ¿alguno podría llegar al centro en una sola jugada?:

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos



Estas propuestas de actividades promueven la interpretación de direcciones y sentidos, con el propósito de que los niños puedan trasladar las relaciones aprendidas a espacios y representaciones de entornos reales, así como también a contextos desconocidos y sus respectivas representaciones.

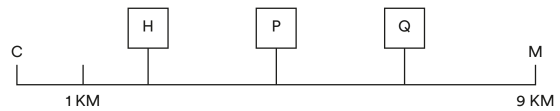
El juego que se incluye en las propuestas anteriores, permite comenzar a trabajar con la noción de ángulo a través del reconocimiento del ángulo como giro y el cambio de orientación. Ese cambio de dirección, por ejemplo S a O, corresponde a un ángulo recto o a un cuarto de giro, si se considera que dando un giro completo se vuelve a la dirección original. Otro ejemplo es que NS determina una dirección perpendicular a la dirección EO. A su vez, en cada dirección se pueden identificar 2 sentidos: de S a N o de N a S, de E a O o de O a E.

En esta propuesta no es importante avanzar en mediciones de ángulos sino en identificar direcciones, cambios de dirección y sentido en una dirección, giros en distintos sentidos (que pueden ser de más o menos ¼ de giro o un ángulo recto).

¿Cómo avanzar hacia la interpretación de un sistema de ejes cartesianos?

Un requisito para poder trabajar sobre un sistema de ejes cartesianos será el manejo de la ubicación de puntos en un único eje (recta numérica) teniendo en cuenta diferentes escalas. Por esta razón, es importante que al trabajar, por ejemplo, con fracciones y decimales los alumnos realicen un trabajo con recta numérica[5].

En este dibujo se ha representado una ruta que va desde la ciudad C hasta la ciudad M. A lo largo del camino, se han colocado carteles indicadores de la distancia del cartel hasta la ciudad C.



¿Qué deberían decir los carteles ubicados en los puntos señalados?

En este caso, está representada la ruta entre la ciudad T y la ciudad A.

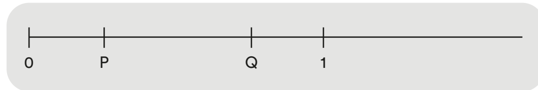
Teniendo en cuenta el cartel que indica 1 km, ubicá los carteles que indican:

a) la ciudad B, que se encuentra a 1 ⅔ km de T.

b) la ciudad G, que se halla a 2 1/6 km de T.

5. Algunos ejemplos pueden encontrarse en la serie Cuadernos para el aula: Matemática 5 (pp. 51-53) y Matemática 6 (pp. 43-48)

Indicá en las siguientes rectas los números que corresponden a la posición de los puntos P y Q:



Otras actividades que contribuyen a familiarizar a los estudiantes con el conocimiento y uso de sistemas de referencia son las tablas de doble entrada, los juegos como la batalla naval o distintos tipos de crucigramas y grillas con palabras.

DISTANCIAS	Buenos Aires	Salta	Formosa	Santa Fe	Paraná
Buenos Aires		1510	1191	478	480
Salta	1510		948	1024	1105
Formosa	1191	948		713	744
Santa Fe	478	1024	713		31
Paraná	480	1105	744	31	

En todos los casos, después de jugar, de hacer un crucigrama o de resolver alguna actividad que requiera la búsqueda de información en una tabla, habrá que presentar algunas preguntas o problemas breves que lleven a identificar y explicitar las referencias utilizadas.

Por ejemplo, para el caso de la batalla naval:

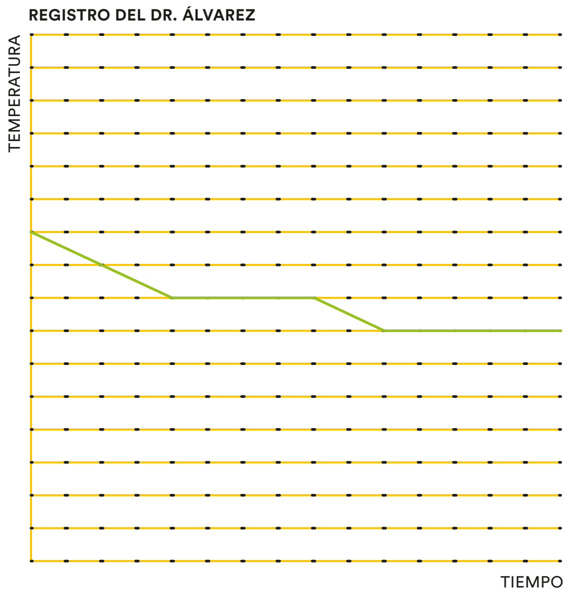
1. A su turno Juan dice F8 y Marcos le contesta: "Averiado". Indicá de cuántos casilleros puede ser el barco.
2. Señalá en la cuadrícula todos los casilleros en los que podría estar el barco y luego escribí todos los pares que podría indicar Juan para hundirlo.
3. En la siguiente jugada Juan dice F7 y Marcos dice "averiado". Escribí los pares que permitirían localizar exactamente el barco.

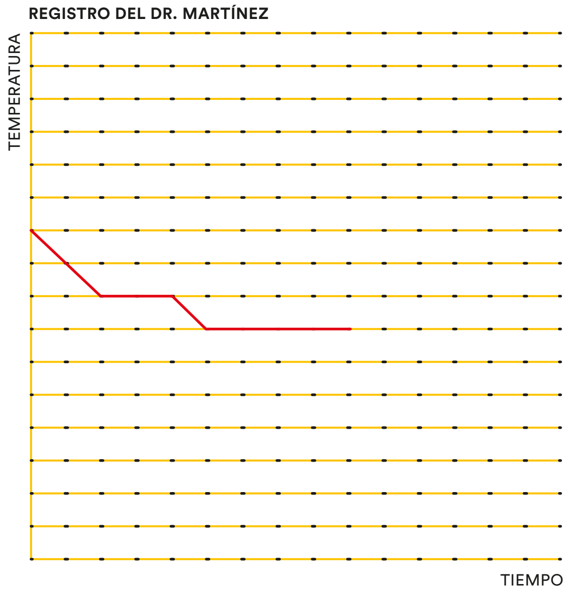
Juan ya le había hundido dos barcos a Marcos. Este es su tablero:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A				X				X		
B										X
C										
D										
E	X									X
F										
G										X
H						X				
I										
J				X						X

Avanzar en el uso de sistemas de coordenadas supone interpretar simultáneamente dos relaciones de proporcionalidad directa (la escala de cada eje), más la relación que se quiere representar a través de la identificación de un punto de la relación con sus coordenadas. Por ejemplo, analicemos la siguiente actividad[6]:

Los médicos Álvarez y Martínez siguieron individualmente la evolución de la temperatura corporalde un paciente y cada uno armó un gráfico de sus registros.
A las 6:00 de la mañana, la temperatura registrada fue de 40°, a las 10:00 h de 38°, temperatura que se mantuvo hasta las 14:00 h. Dos horas más tarde, la temperatura descendió un grado y se mantuvo estable el resto del día.
Cuando ambos médicos presentaron el informe al jefe de sala, se dieron cuenta de que los gráficos no coincidían.
a. ¿Es cierto que según el gráfico del doctor Álvarez el paciente tardó más tiempo en responder a la medicación? ¿Por qué?
b. ¿Qué criterios usaron los médicos para elegir las escalas y los orígenes en los ejes de coordenadas?

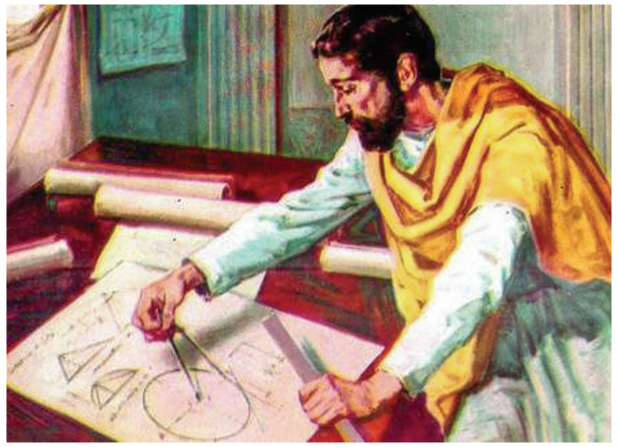




En este ejemplo, podemos advertir la importancia de trabajar con los estudiantes la cuestión de cómo cambia la percepción global del lector frente a distintos modos de presentar la información. Este tópico es de suma importancia en la formación de un lector crítico de la información que se brinda en los medios. Como es fácil advertir, la evolución en las posibilidades de usar y controlar relaciones espaciales y sistemas de referencia depende de un trabajo progresivo y muy articulado.

6. Actividad extraída de: ¿Es la misma información o no? Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología de la Nación Matemática: leer, escribir y argumentar. 1a ed. Buenos Aires: Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, 2007, p.14.
http://repositorio.educacion.gov.ar/dspace/bitstream/handle/123456789/96359/EL002722.pdf

De los dibujos a las construcciones
De los dibujos de redondeles al uso del compás en las construcciones

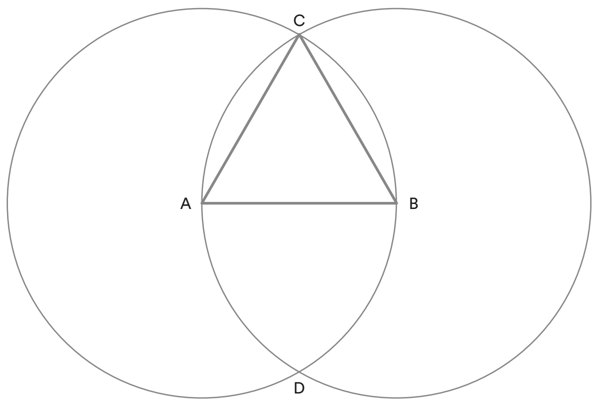


Se sabe que los griegos de la antigüedad, ya reconocieron la diferencia entre los objetos físicos y los conceptos geométricos, tales como circunferencia o triángulo y que estudiaron numerosos problemas dibujando con regla y compás.

Ahora bien, la posibilidad de realizar y analizar construcciones con compás requiere conocer su uso tanto para copiar y transportar segmentos, manteniendo su longitud aún sin conocer su medida, como para determinar puntos que se encuentran a una cierta distancia de otros. En este sentido, el compás es un instrumento fuertemente ligado al trabajo sobre distancias. Sin embargo, muchos estudiantes sólo lo asocian a la posibilidad de trazar redondeles o curvas.

Esta asociación del instrumento a la forma del trazo o a una imagen perceptiva de un dibujo, más que a su función, es un obstáculo que necesitamos abordar para que sea posible avanzar en el uso de las construcciones como un medio para conocer las propiedades de las figuras.

Hay una gran diferencia entre dibujar flores manteniendo el radio del compás y argumentar que el triángulo ABC es equilátero porque fue dibujado usando la circunferencia de centro A y radio $\overline{AB}$, y la circunferencia de centro B y radio $\overline{BA}$, $\overline{AB}=\overline{BA}$.



¿Cómo comenzar a usar el compás?

Si bien es posible apoyarse en la reproducción de diseños para comenzar a explorar el uso del compás, será necesario reflexionar acerca de cómo se hacen esos dibujos y agregar desafíos de complejidad creciente, que lleven a identificar "dónde hay que pinchar y cuánto hay que abrir el compás". Estos serán los primeros pasos para reconocer el radio y el centro de la circunferencia.

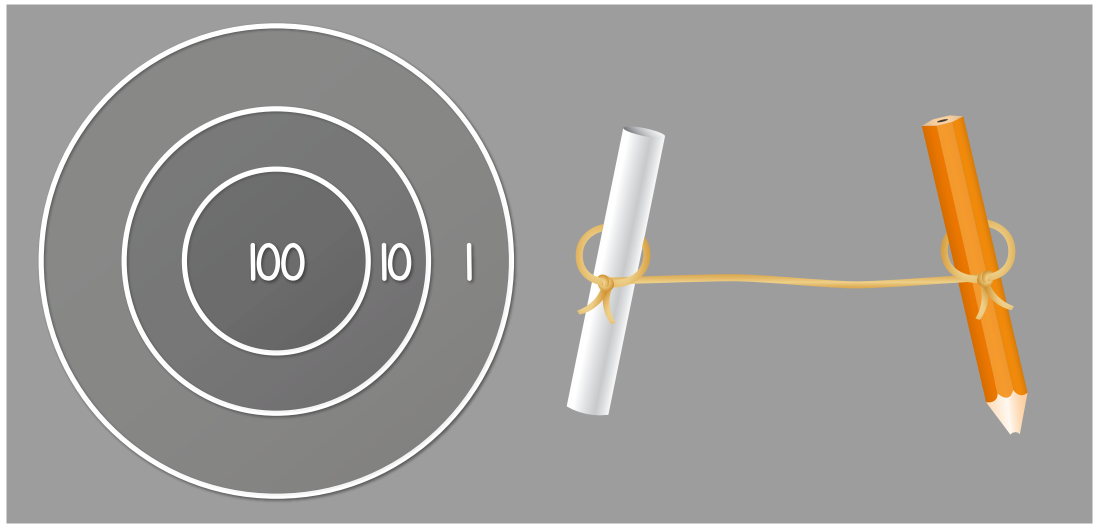
A continuación, se presentan propuestas pensadas para los grupos anaranjado y rojo, que permiten abordar cuestiones en relación al uso del compás y la construcción de figuras circulares. Para este tema no se presentan actividades para los más pequeños, pues el uso del compás es propio del trabajo en el segundo ciclo. De todos modos, la participación de todos está contemplada en los juegos y la reflexión posterior acerca de las regiones que quedan determinadas en los distintos diseños.

Propuesta 3
Conociendo a los círculos y a las circunferencias

Tiro al blanco

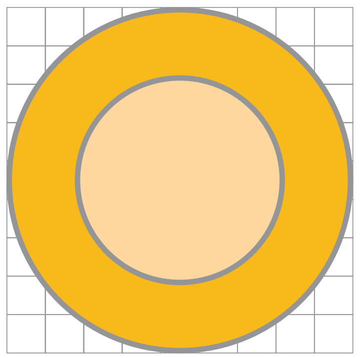
1 Preparen un tiro al blanco para jugar con los compañeros más chicos. Pueden hacerlo en el patio usando un hilo, un palito o un lápiz sin punta y una tiza. Aten el palito en un extremo con un lazo, de modo que el hilo pueda girar alrededor del palito, y la tiza en el otro extremo. Mientras uno de ustedes sostiene el palito, otro hace la marca con la tiza manteniendo el hilo bien tirante. Decidan entre todos de qué tamaño van a ser las marcas con tiza y qué puntaje

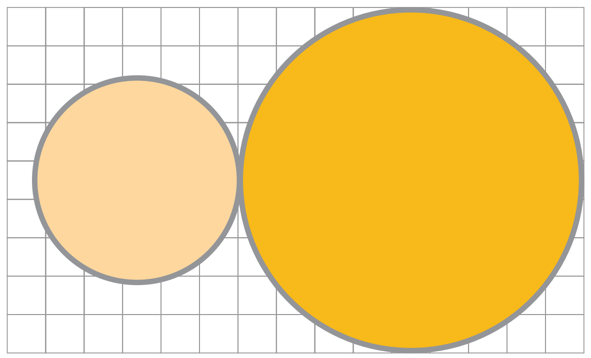
Sugerimos realizarlo en pequeños grupos



2 Para hacer círculos en una hoja podés usar el compás

a Copiá estos dibujos:

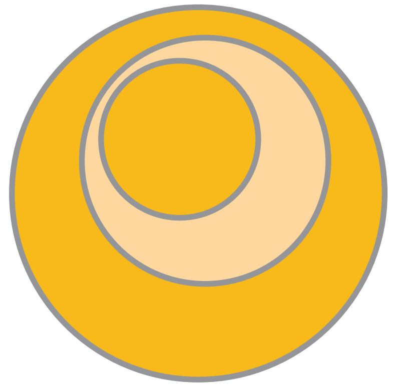




b ¿En qué se parecen y en qué se diferencian los dibujos anteriores?

c Hacé otro dibujo combinando dos círculos con la misma medida pero en otra posición.

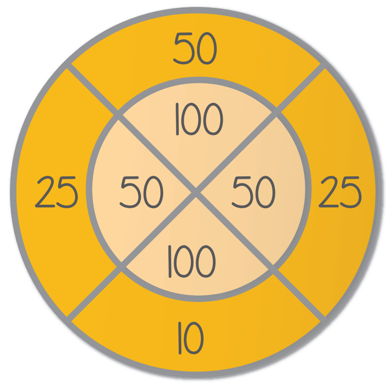
3 **a** Para hacer las marcas de un tiro al blanco en un patio, un grupo de chicos usó una rueda de bicicleta, una fuente redonda grande y una lata.
Aunque pudieron jugar no les quedó muy bien. ¿Qué piensan que pudo haber pasado?

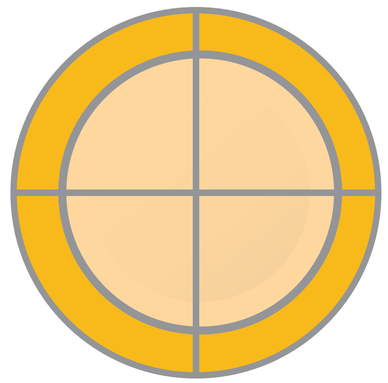


Sugerimos realizarlos en pequeños grupos

b ¿Podés saber si alguno de los dos ganó? ¿Por qué?

4 **a** Otros chicos trataron de copiar este modelo de tiro al blanco y les quedó así:





Sugerimos realizarlos en pequeños grupos

¿Qué piensan que tendrían que arreglar para que les quede más parecido al modelo?

b ¿Qué medidas hay que tener en cuenta y en qué se tienen que fijar para ubicar los círculos?

Al analizar esta propuesta, se puede distinguir que en las actividades 1 y 2 el énfasis está puesto en la acción, es decir, promueven que los estudiantes realicen tareas de construcción. En cambio, en las actividades 3 y 4 el énfasis está puesto en la reflexión de las tareas de construcción, lo que permitirá arribar a conclusiones matemáticas en relación a la noción de centro de la circunferencia y su radio.

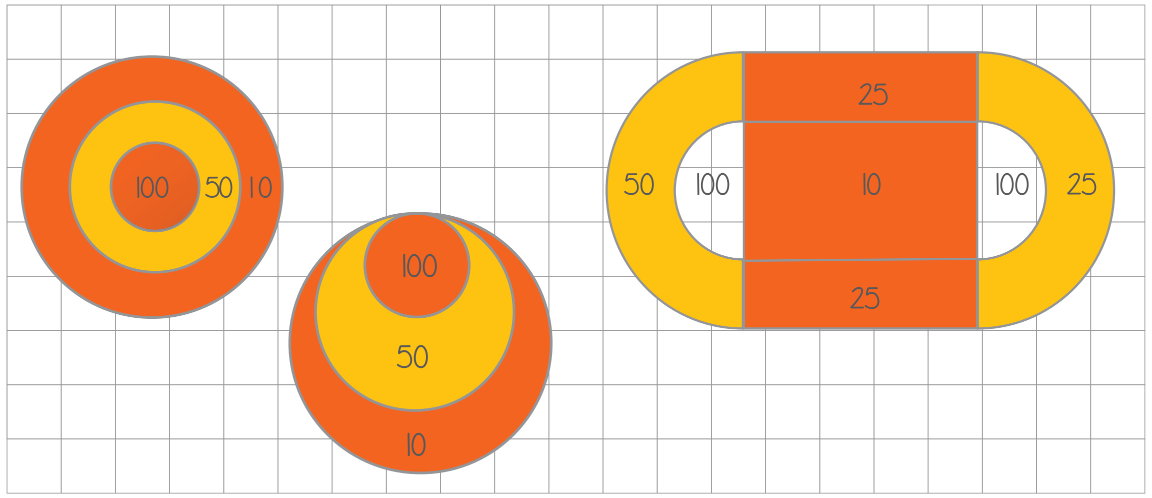
A su vez, es posible reconocer que la complejidad de la propuesta está dada por el tipo de instrumento que se utiliza, el tipo de hoja, el tipo de tarea, y por las propiedades que se trabajan.

Es importante aclarar que, en esta instancia, el foco debería estar puesto en mayor medida en el trabajo con las propiedades de las figuras y en menor medida en la precisión de la construcción.

Diseñando con compás un Tiro al blanco

1 Mini tiro al blanco:
Para los días de lluvia pueden diseñar mini tableros para jugar en el aula con bollitos de papel. Pueden hacerlos en hojas grandes o una cartulina, usando un hilo atado a un lápiz y una chinche o un clavito para fijar el centro.

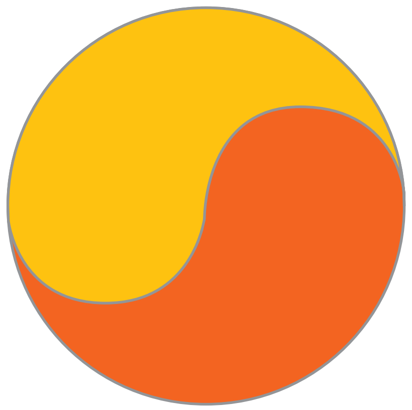
a Antes de hacerlo en grande, preparen en un esquema en un papel usando regla y compás. Decidan y anoten las medidas que van a usar. Estos son algunos modelos posibles:

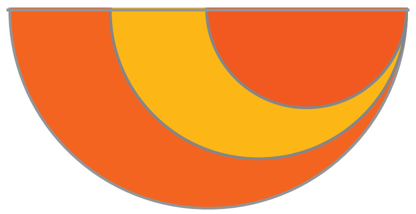


2 Diseños usando el compás

a Elegí uno de estos diseños para copiarlo. Si es necesario agregá algunas líneas que te ayuden a hacerlo.

Sugerimos realizarlo individualmente

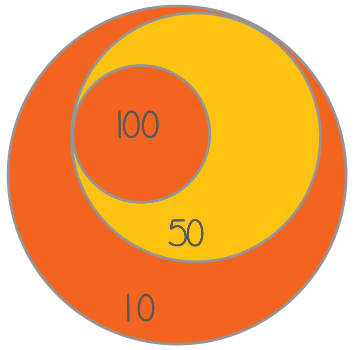




b ¿Qué medidas tuvieron que tomar?

c ¿Cómo ubicaron los centros de las circunferencias?

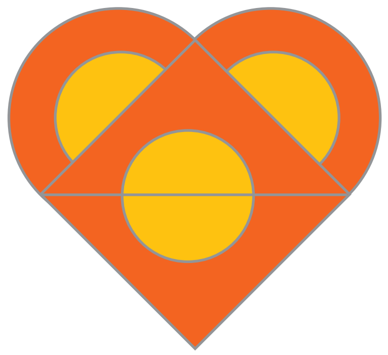
3 Al hacer uno de los diseños en un tamaño más grande, un grupo de chicos dibujó un tiro al blanco como este:



a ¿Por qué no les quedó igual al modelo? ¿Qué piensan que pudo haber pasado?

b Anoten qué sugerencia le daría al grupo para que el diseño quede más parecido al modelo original.

4 Un grupo pensó en este diseño combinando un cuadrado y varias circunferencias, pero los chicos lo hicieron en papel liso y no se acuerdan dónde ubicaron los centros:

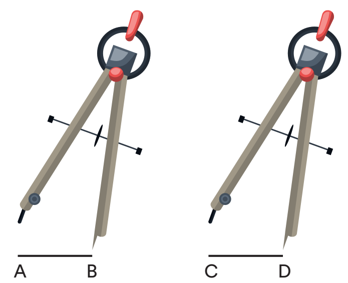


a ¿Por qué no les quedó igual al modelo? ¿Qué piensan que pudo haber pasado?

b Anoten qué sugerencia le daría al grupo para que el diseño quede más parecido al modelo original.

Al implementar esta propuesta será importante tener en cuenta que según sea la dificultad del dibujo será necesario trazar rectas auxiliares para ubicar los centros y “tomar medidas” usando la abertura del compás.

Si bien se puede conocer la medida de estos segmentos en centímetros usando la regla también, prescindiendo de ella, se puede asegurar que el segmento $\overline{CD}$ tiene la misma longitud que el segmento $\overline{AB}$ usando el compás.



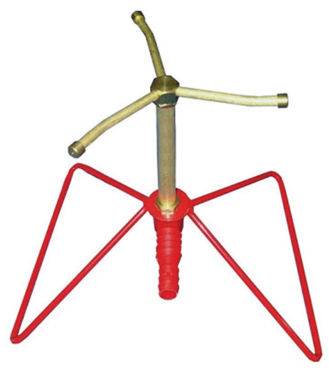
Estas primeras exploraciones que se producen en las propuestas anteriores no son suficientes para advertir que cualquier, y todos, los puntos de la circunferencia se encuentran a la misma distancia del centro. Esta idea de “equidistancia” de los puntos al centro se relaciona con la posibilidad de pensar la circunferencia como el conjunto de todos los puntos del plano que se encuentran a una misma distancia de otro que llamamos centro, condición que define a la circunferencia como lugar geométrico. Para avanzar en esta idea será necesario plantear otros problemas, como los que se presentan en la siguiente propuesta asociados a los regadores[7], que también permiten diferenciar círculo y circunferencia.

7. Los chicos más grandes pueden investigar en la web los proyectos de cultivo con riego en zonas desérticas, en los que se advierten enormes círculos verdes desde el aire.

El problema del regador

1 Damián tiene un jardín de 15 m por 6 m y compró un regador giratorio.
El agua llega hasta 2 m del pico del regador.

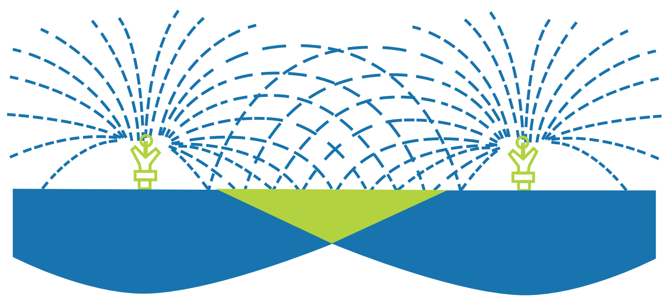
Sugerimos realizarlo en pequeños grupos



a Su hijo, que es el encargado de mover el regador, piensa que con una manguera bien larga y ubicándolo en cuatro lugares distintos alcanza para regar todo. El padre dice que va a tener que moverlo seis u ocho veces. ¿Qué piensan ustedes?

b Hagan un esquema a escala del jardín y marquen en qué lugares se podría poner el pico para moverlo la menor cantidad de veces y regar la mayor parte del jardín. Pueden representar metros con centímetros.

c ¿Hay zonas que quedan sin regar y otras que recibieron más agua? Márquenlas en el esquema.



2 En el jardín hay dos canillas, ubicadas en la mitad de cada uno de los lados y una manguera de 5 metros. Damián cree que va a tener que comprar una manguera más larga, aunque hay partes del jardín que se pueden regar con cualquiera de las dos canillas.

a Ubicá en otro esquema las canillas y hasta dónde se puede llegar con cada manguera.

b Marcá el sector que se puede regar con ambas mangueras.

c Teniendo en cuenta que el regador tiene un alcance de 2 metros, ¿creés que quedarían partes sin regar y que Damián tendría que comprar una manguera más larga?

3 Trazá un segmento $\overline{AB}$ de 10 cm.

a Con centro en A trazá una circunferencia de 3 cm de radio y, con centro en B, una circunferencia de 4 cm de radio.

b Ubicá en el dibujo:

- **un punto C que esté a 3 cm de A y a 4 cm de B**
- **un punto D que esté a 3 cm de A y a más de 4 cm de B**
- **un punto E que esté a 3 cm de A y a menos de 4 cm de B**

c ¿Cuántas ubicaciones posibles hay para colocar el punto C? ¿Y para colocar los puntos D y E?

d ¿Cómo podrías ubicar un punto M que esté a 3 cm de A y a 3 cm de B?

4 Alex tenía que construir un triángulo equilátero y le pasó estas instrucciones a su amigo Leandro por teléfono:

Marcas un punto, que va a ser A, y pinchando el compás en A hacés una circunferencia del radio que quieras. Después marcas otro punto B, y sin cambiar la abertura del compás hacés una circunferencia pinchando en B. Se te van a cortar las circunferencias en dos puntos, cualquiera de esos puede ser C. Si unís A, B y C te queda el triángulo equilátero.

a Leandro siguió las instrucciones pero el triángulo no le quedó con todos los lados iguales. ¿Qué piensan que pudo haber pasado?

b Corrijan el mensaje para que se pueda construir un triángulo equilátero.

c ¿Cómo habría que cambiar el mensaje para que el triángulo fuera isósceles?

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

5 **a** Escriban un mensaje para construir un triángulo con un lado de 5 cm, otro de 6 cm y otro de 4 cm.

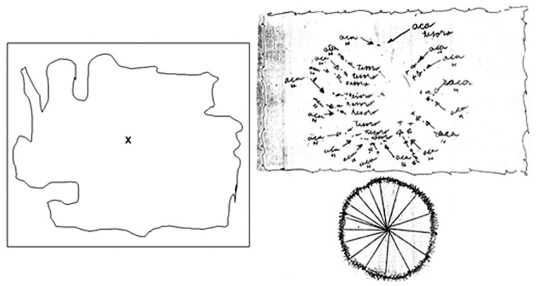
b Comparen el mensaje con el de otros compañeros y si son distintos, anoten en qué se diferencian.

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

Al analizar las actividades 1 y 2 de la última propuesta, es posible que una primera estrategia que utilicen los estudiantes cuando intentan determinar hasta dónde puede llegar el agua de un regador, es usar la regla para marcar distintos puntos que están a esa distancia de otro en el que ubican la posición inicial del regador.

PIXABAY.COM (CC0 1.0)

Se pueden observar algunos ejemplos de estos procedimientos frente a actividades similares incluidas en el Documento de actualización curricular nº 5: La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. También en este documento, en la página 53, se presenta una secuencia en la que se propone a los chicos descubrir dónde puede encontrarse un tesoro que está en el mapa, a 5 cm de la cruz. Los chicos usan la regla para encontrar esos puntos.



Esto muestra que aunque rápidamente los alumnos pueden decir que los puntos de la circunferencia están a la misma distancia del centro, no es evidente que hay infinitos puntos que verifican esa condición y que, justamente, definen a la circunferencia. La consideración de los puntos que están a una distancia del centro menor o igual al radio, determinará la región que corresponde al círculo.

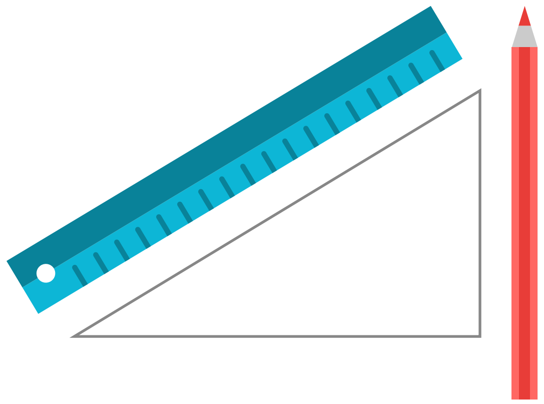
Tampoco ayuda para esta conceptualización una tradición escolar en la que muchas veces se ha usado el compás para marcar "arcos" en un instructivo para hacer una cierta construcción, sin que se explicite o se ponga en cuestión por qué hay que hacer esos arcos ni qué significan. En esta cuestión nos detendremos en la siguiente sección.

La actividad 3 invita a los estudiantes a poner en relación los radios de las circunferencias para ubicar puntos que estén a una cierta distancia de otros. Esto les permitirá reconocer en el ítem c) que hay dos opciones para ubicar el punto C, e infinitas (aunque no cualquiera) para el punto D y E. En el ítem d), para ubicar el punto M hay dos posibilidades pero, para hacerlo, es necesario trazar una nueva circunferencia con centro en B y radio 3 cm.

Luego de trabajar esta actividad, sería interesante preguntar: ¿qué características tienen los lados de triángulos ACB y AMB?, ¿cómo se podría hacer para construir un triángulo que tenga un lado de 7 cm y otros dos de 5 cm?

De este modo se relaciona la construcción de triángulos con la determinación de la ubicación de sus vértices, apoyados en la idea de que el compás permite trazar circunferencias con distintos radios que representan distancias entre puntos.

En muchas ocasiones, cuando los estudiantes intentan construir un triángulo conociendo la medida de sus lados, lo van haciendo por ensayo y error, tratando de hacer coincidir las medidas de los lados con la regla.



Pensar la construcción de figuras apoyadas en el uso del compás supone un avance importante. Por ejemplo, si dado un segmento se desea construir un triángulo equilátero, que tenga ese segmento como lado, el desafío para determinar el tercer vértice es encontrar un punto que se encuentre a la misma distancia de los extremos del segmento.

A su vez, cambiar los radios de las circunferencias y la medida inicial del segmento nos permite descubrir cómo construir triángulos con lados de distintas medidas, sin que el procedimiento haya sido presentado antes a modo de un instructivo.

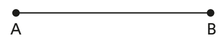
De este modo, los estudiantes se irán familiarizando con el compás como un instrumento que les permite determinar una región del plano, una curva, cuyos puntos se encuentran a una cierta distancia de otros. Combinar distintas circunferencias y encontrar los puntos en los que "se cortan" (los puntos de intersección) permite determinar puntos que, a la vez, se relacionan con otros dos, lo que posibilita dibujar distintas figuras combinando varias circunferencias.

¿Qué significado tienen las marcas que deja el compás en un procedimiento de construcción?

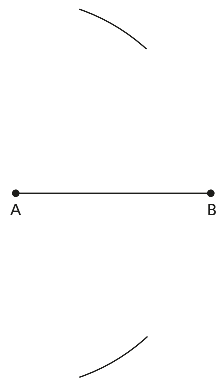
Un ejemplo clásico de trazado de "arcos" para hacer una construcción es el de la mediatriz de un segmento.

En las siguientes imágenes, se puede ver un ejemplo de una secuencia de construcción con instrucciones, que seguramente les resulta familiar pues no son muy diferentes de las que tuvieron cuando estudiaban:

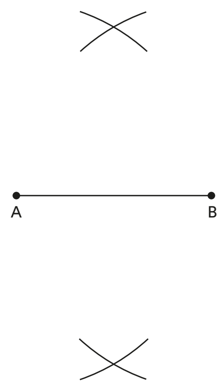
1. Trazar un segmento $\overline{AB}$



2. Con centro en A, trazar "dos arquitos" uno arriba y otro abajo, abriendo el compás un "poco más" de la mitad del segmento $\overline{AB}$.



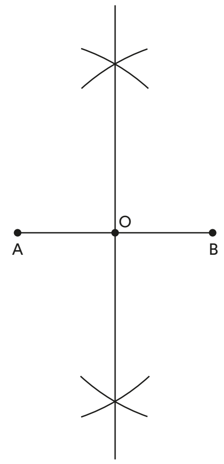
3. Con la misma abertura del compás, trazar "dos arquitos" pero ahora con centro en B.



4. Trazar una recta que pase por los puntos que se forman con las "cruces".

Se puede marcar el punto O, que es la mitad de $\overline{AB}$.

La recta trazada se denomina *mediatriz del segmento*, y es perpendicular a éste, y además cada punto de la recta está a igual distancia de A y B.



Ahora bien, es importante cuestionar lo siguiente:

¿Por qué trazar "dos arquitos" uno arriba y otro abajo, abriendo el compás un "poco más" de la mitad del segmento AB ? ¿Por qué "un poco" más de la mitad del segmento? ¿Cuánto más? ¿Por qué no menos de la mitad? ¿Qué significan esas "cruces" que se obtienen?

¿Por qué se puede asegurar que el punto O es justo la mitad de A y B? ¿Por qué se afirma que cada punto de la mediatriz están a la misma distancia de A y de B?

¿Cómo se asegura que la mediatriz es perpendicular al segmento?

¿Podría un estudiante responder estas preguntas siguiendo el instructivo? Es muy posible que no logre responderlas, pero seguramente podrá repetir los pasos y decir *"Tracé la mediatriz del segmento"*, aún sin comprender qué es lo que esto significa.

Claramente, detrás de los distintos instructivos para construir la mediatriz de un segmento, hay propiedades de las figuras que no se explicitan. Por otra parte, tampoco hay una pregunta que oriente la tarea de reflexión. Por ejemplo: ¿qué se busca cuando se traza la mediatriz de un segmento? ¿Se hace para encontrar su punto medio? ¿Se trata de un método para trazar perpendiculares? ¿Hay alguna otra propiedad que se pueda relacionar con esta construcción?

Cabe señalar que es fundamental tener en cuenta que cuando se proponen construcciones geométricas a los estudiantes, las mismas deben estar acompañadas por preguntas que orienten esa construcción y que permitan evaluar si el dibujo realizado se ajusta o no a lo que se está buscando.

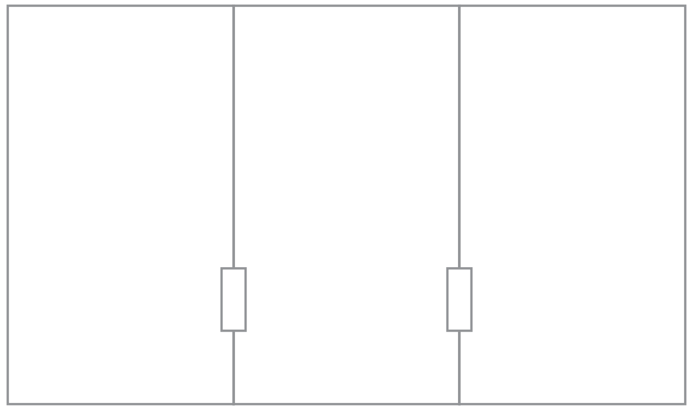
A continuación se presenta un conjunto de actividades que permiten que los estudiantes construyan la noción de mediatriz y su trazado, a partir de problemas que promueven un trabajo de reflexión y cargan de sentido a las tareas que realizan.

Propuesta 4

Un problema de distancia

1 Consideren la siguiente situación, analicen las distintas decisiones que podría tomar Pedro marcando en el esquema y registren sus conclusiones:

a Pedro quiere instalar un molino y dos bebederos en su chacra de modo que pueda tener agua disponible para los animales en tres potreros distintos. Decide colocar los bebederos junto a los alambrados que separan los potreros y piensa que el molino tendría que estar a la misma distancia de ambos. ¿Dónde podría ir el molino?



Este es un esquema de los potreros y una ubicación posible para los bebederos .

b Vicente, su vecino, dice que mejor ubique el molino al lado de otro alambrado. A Pedro le parece bien, pero quiere gastar lo menos posible en la instalación de cañerías. ¿Dónde podría ubicar el molino?

2 Es fácil ubicar un punto a una distancia dada de otro, pero ¿cómo se hace cuando hay que relacionar varios puntos a la vez?

En una hoja lisa marquen dos puntos cualesquiera A y B, que estén más o menos a unos 4 o 5 cm.

Consideren esos dos puntos y respondan a las preguntas que siguen. Para hacerlo pueden usar regla, compás y agregar todas las marcas que necesiten.

a Ubiquen un punto que se encuentre a 5 cm de A y llámenlo C. Este punto, ¿a qué distancia estiman que está de B? ¿A más de 5 cm, a menos, o a 5 cm?

b Ubiquen un punto D que esté a 5 cm de A y de B. ¿Cuántos puntos pueden encontrar que cumplan con esa doble condición? Márquenlos.

c ¿Es posible encontrar puntos que estén a 4 cm de A y también a 4 cm de B? Si es posible ubíquenlos. Si no, escriban por qué no pudieron hacerlo.

d ¿Para qué otras medidas pueden encontrar puntos que estén a la misma distancia de A y de B?

e Exploren lo que ocurre con, por ejemplo 3 cm, 6 cm, 7 cm, o las medidas que ustedes prefieran.

f Sin usar el compás o la regla, anticipen dónde podrían encontrar puntos que se encuentren a 5,5 cm de A y de B, y a 6,5 cm de cada uno. Marquen aproximadamente su ubicación.

g Analicen lo que afirman estos dos chicos. ¿Piensan que puede ser cierto lo que dicen? ¿Por qué?

Pablo: *No hace falta ir cambiando tanto las medidas. Si encontrás dos puntos que estén a la misma distancia de A y de B, es fácil saber dónde hay otros puntos que “equidistan” de A y de B.*

Eliana: *Yo puedo marcar un punto que esté justo en el medio de A y B , sin medir con la regla.*

El estudio de figuras

Las tareas en la clase de geometría

A continuación se explicitan algunas de las tareas problematizadoras que es interesante incluir en una planificación de geometría, como así también el tipo de prácticas que los estudiantes pueden desarrollar al resolverlas. Asimismo, se analizan las tareas de un primer grupo de propuestas para tres niveles en el aula, orientadas a estudiar dos cuadriláteros particulares como son el cuadrado y el rectángulo.

¿Qué actividades en la escuela para el trabajo con figuras?

En estos últimos años, se diseñaron diversas propuestas didácticas que permiten plantear en la clase actividades geométricas problematizadoras, es decir, problemas en los que los saberes geométricos surgen como instrumentos de resolución y que, por lo tanto, dan lugar a un tipo de trabajo geométrico de exploración y producción de procedimientos de resolución, de comunicación de lo realizado y de debate en grupo para analizar la validez de las respuestas encontradas.

En los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) se explicitan algunas situaciones y tareas posibles para proponer en el aula, de modo que los estudiantes desarrollen algunas prácticas geométricas. Por ejemplo:

En tercer grado

- **Construir** y **copiar** modelos hechos con formas bi y tridimensionales con diferentes materiales, tipos de papel e instrumentos.
- **Comparar** y **describir** figuras y cuerpos según sus características (número de lados y vértices, bordes curvos o rectos, igualdad o no en la medida de sus lados, forma y número de caras) para que otros las reconozcan o las dibujen.
- **Explorar afirmaciones** acerca de las características de las figuras y **argumentar** sobre su validez.

En sexto grado

- **Copiar** y **construir** figuras a partir de diferentes informaciones sobre propiedades y medidas, con diferentes instrumentos y evaluando la adecuación de la figura obtenida.
- **Describir**, **comparar** y **clasificar** figuras en base a propiedades conocidas.
- **Producir** y **comparar** desarrollos planos de cuerpos argumentando sobre su pertinencia.
- **Componer** y **descomponer** figuras y argumentar sobre las propiedades de figuras obtenidas.
- **Analizar afirmaciones** acerca de las propiedades de las figuras y **argumentar** sobre su validez.

A continuación, se presenta una breve caracterización de estos tipos de tareas.

Copiar y construir

Las situaciones de copia con y sin modelo presente, dictado, pedido de datos y la construcción a partir de datos dados, permiten construir las figuras y analizar si es posible un dibujo, varios o tal vez ninguno que respondan a esos datos.

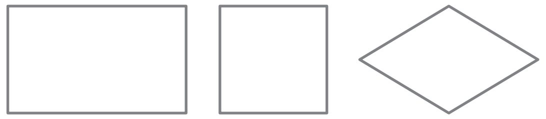
Al momento de elegirlas, es importante considerar cuáles son los conocimientos geométricos que se ponen en juego en cada caso. En este sentido, se presenta una breve síntesis descriptiva:

- Copiar con modelo presente: la figura está disponible al lado de cada estudiante, deben pensar la figura en términos de los elementos que la constituyen sin explicitar las relaciones.
- Copiar sin modelo presente: se dispone de una única figura que se encuentra en una mesa. Los estudiantes pueden ir a buscar la información que quieran, anticipar información necesaria y registrarla.
- Pedir datos: el maestro tiene la figura y dice cuál es, y los niños piden los datos que necesiten. Éstos deben concebir la figura genérica porque no la pueden ver.
- Construir a partir de datos: sólo se brindan los datos, lo cual permite discutir la constructibilidad y cantidad de soluciones.
- Dictar una figura: consiste en el intercambio de información con mensajes, habilita a la superposición de figuras como validación, requiere de la explicitación de relaciones.

Formar figuras a partir de otras

Las situaciones para armar nuevas figuras a partir de otras y desarmar figuras considerando otras líneas además de su contorno, dan lugar al establecimiento de relaciones entre las figuras que intervienen. En Matemática 4, Cuadernos para el aula (p. 147) se presenta una secuencia, que puede adaptarse para ser desarrollada con alumnos de distintos grupos, y que ilustra el siguiente trabajo:

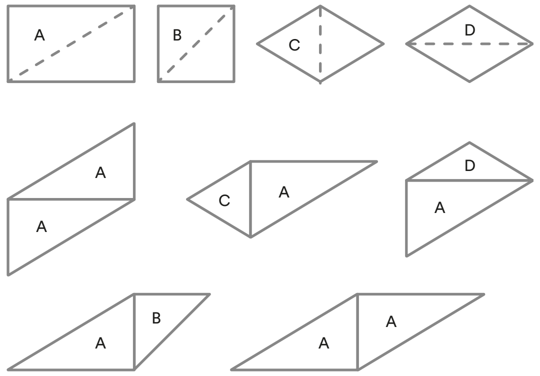
Actividad 1
Se entrega a cada grupo de alumnos una hoja en la que se ha dibujado un rectángulo de 6 cm por 10 cm, un cuadrado de 6 cm por 6 cm y un rombo con diagonales de 10 y 6 cm.



Luego presentaremos una consigna como la siguiente:

Propongan formas de recortar cada cuadrilátero en dos triángulos iguales.

Los chicos podrán armar, entre otros, cuadriláteros como los siguientes:



Comparar, describir, reconocer, clasificar

Partiendo de modelos ya realizados, dibujos o recortes en papel, se pueden organizar distintas actividades que involucran el reconocimiento de elementos y propiedades. Un ejemplo es el caso de los juegos de “adivinanza”, a partir de un conjunto de figuras que se elige según las propiedades que se pretendan trabajar. Los alumnos formularán preguntas para descubrir la figura que el docente ha pensado, teniendo en cuenta las condiciones que la consigna impone al tipo de preguntas que se pueden hacer. Las preguntas surgirán de la comparación de las características de las figuras y luego permitirán describir a cada una. Asimismo, de la organización de grupos de figuras con propiedades comunes podrán surgir diferentes clasificaciones de las mismas.

Analizar afirmaciones y clasificar

Las tareas que se presentan a continuación permiten retomar y sistematizar conocimientos elaborados en situaciones que involucran los tipos de tareas mencionadas anteriormente. La organización de cuadros clasificatorios son ejemplos de este tipo de tarea. En Matemática 5, Cuadernos para el Aula (p. 151), se encuentra un ejemplo en el que se organizan grupos de cuadriláteros según las características de sus diagonales:

Otro ejemplo son las actividades que permiten sistematizar propiedades o las que permiten el análisis de la verdad o falsedad de afirmaciones, como la que se presenta en Matemática 6, Cuadernos para el Aula (p. 151):

Justificá la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones, utilizando contraejemplos en el caso de que sean falsas.
- Un cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales es un cuadrado.
- Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados iguales es un rectángulo.
- Una figura de cuatro lados que tiene un ángulo recto es un trapecio rectángulo.
- Una figura que no es paralelogramo y tiene sus diagonales perpendiculares es el romboide.

¿Qué tareas es posible plantear a los estudiantes para abordar el estudio de los cuadrados y los rectángulos?

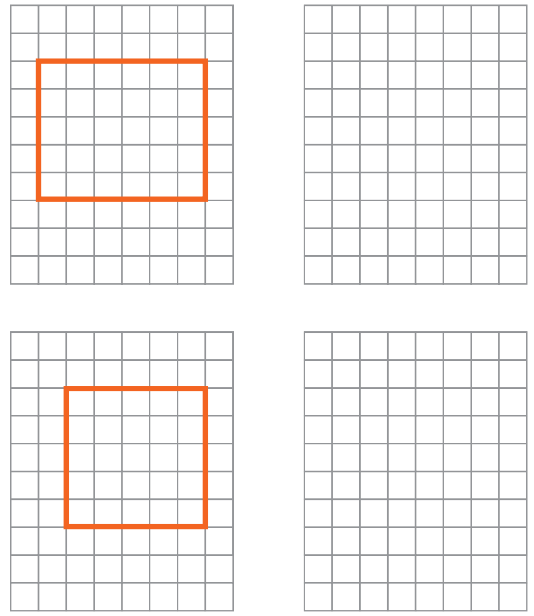
A continuación se presentan tres propuestas didácticas, orientadas a estudiar el cuadrado y el rectángulo, elaboradas para grupos de niños con diferentes conocimientos. Estas propuestas incluyen actividades de construcción en papel cuadriculado y en hoja lisa, con uso progresivo de instrumentos de geometría, iniciando en el primer ciclo solamente con la regla e incorporando luego el compás y la escuadra.

		DIAGONALES PERPENDICULARES		DIAGONALES NO PERPENDICULARES	
		DOS PARES DE LADOS PARALELOS	UN PAR DE LADOS PARALELOS	DOS PARES DE LADOS PARALELOS	UN PAR DE LADOS PARALELOS
DIAGONALES DIFERENTES	UNA ES CORTADA EN SU PUNTO MEDIO				
	LAS DOS SE CORTAN EN SUS PUNTOS MEDIOS				
DIAGONALES IGUALES	UNA ES CORTADA EN SU PUNTO MEDIO				
	LAS DOS SE CORTAN EN SUS PUNTOS MEDIOS				

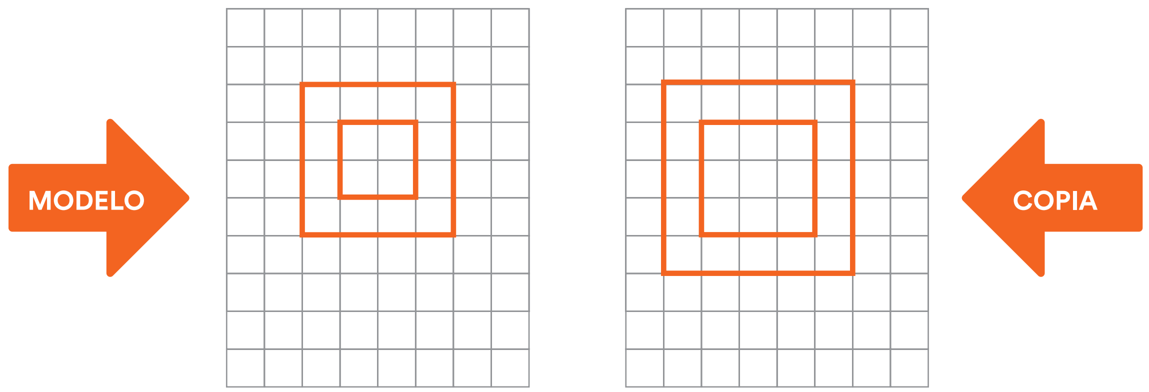
Propuesta 5
Cuadrados y Rectángulos

Comparando figuras

1 Copiá estas figuras en papel cuadriculado



2 Algunos chicos copiaron así esta figura:



a ¿Son iguales?

b ¿En qué se diferencian las dos figuras que copiaron?

c ¿En qué se parecen las dos figuras que copiaron?

3 Armar las figuras plegando papeles:

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

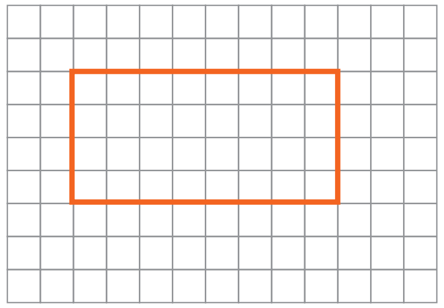
a Con un papel glasé,
- ¿Cómo doblarían el papel una sola vez, para que al abrirlo queden dos triángulos iguales?
- ¿Pueden estar seguros, antes de abrirlo, de que van a quedar dos triángulos iguales?
- ¿En qué se fijan?

b ¿Cómo doblarían un papel igual al anterior, una sola vez, para que al abrirlo queden marcados dos rectángulos iguales?

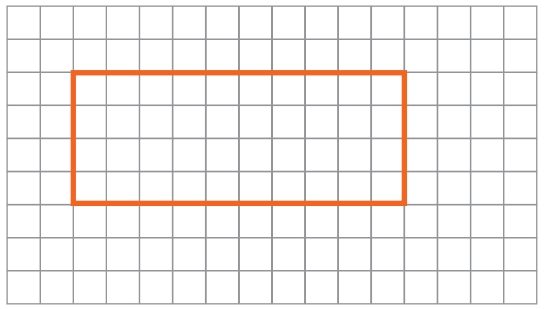
c Doblen un papel rectangular una sola vez, para que al abrirlo les queden dos rectángulos iguales.

4 Responder sin plegar el papel

a Daniela tiene este rectángulo y dice que, al doblarlo una sola vez por la mitad, puede armar dos cuadrados. ¿Estás de acuerdo?



b Éste es el rectángulo que tiene Malena. Al doblarlo una sola vez a la mitad, ¿va a poder armar dos cuadrados?



Análisis de las tareas que se proponen y las prácticas que permiten desarrollar

En la actividad 1, se propone la tarea de copiado de figuras con modelo presente, utilizando regla. El trabajo en papel cuadriculado deja afuera la discusión sobre los ángulos pues, al estar los lados sobre la cuadrícula, éstos son rectos. Esto permite que la atención de los niños se centre en la medida de los lados, es decir en "contar los cuadraditos de cada lado", lo que implica tomar como unidad de medida el lado de cada cuadradito de la cuadrícula.

En la actividad 2, se propone analizar una copia en relación con el modelo dado. La figura que se propone analizar, que está compuesta por dos cuadrados (uno interior al otro, con lados paralelos y de medidas diferentes), es de mayor complejidad.

Las preguntas de reflexión que pueda realizar el docente sobre lo trabajado en las actividades 1 y 2, permitirán la explicitación de lo pensado al dibujar y de las características de las figuras, mediante la exploración de las mismas. La validación de la figura dibujada se realiza por superposición de la figura original y la copiada.

En las actividades 3 y 4 se propone plegar un papel y anticipar el resultado de un plegado. El tipo de tarea que se propone es "formar figuras a partir de otras". La idea de obtener cuadrados por plegado de rectángulos se apoya también en la medición de los lados de las figuras, para poder asegurar que en el rectángulo dado, la longitud del lado más corto es la mitad de la del lado más largo.

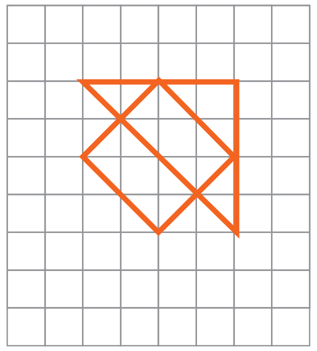
Estas actividades dan lugar al establecimiento de relaciones entre las figuras que intervienen y a derivar propiedades para las nuevas figuras a partir de conocer las de las figuras originales. La validación de las propiedades de las nuevas figuras dependerá de haber considerado, en forma adecuada, las propiedades de las figuras de partida.

Elaborando mensajes

1 Copiá esta figura sobre papel cuadriculado, podés usar regla.
Cuando termines, superponé la copia sobre este original para saber si quedó bien.

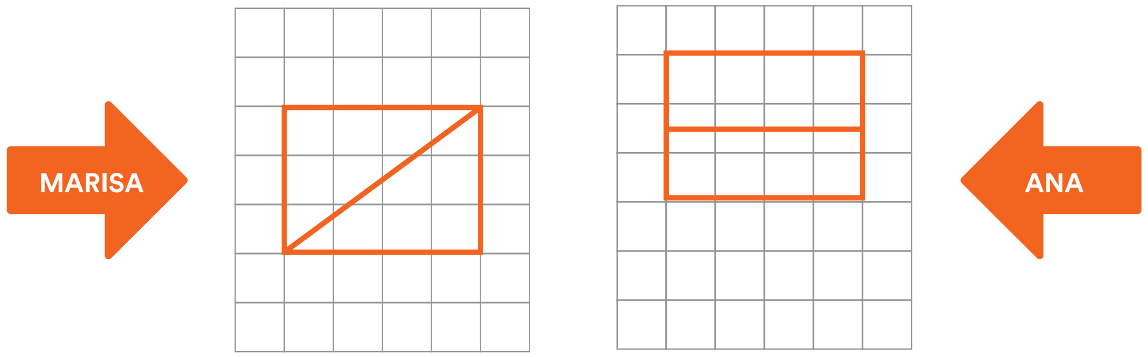
a Compará la figura original y la copia.

b ¿En qué se parecen?



Sugerimos realizarlo individualmente

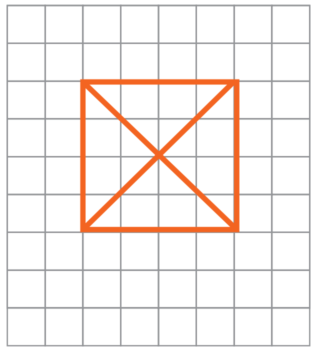
2 Ana faltó a la escuela y llamó a Marisa para pedirle la tarea. Marisa mirando su dibujo le dijo: "Tenés que dibujar un rectángulo que tenga dos lados de 4 cm y dos de 3 cm, dividido en dos partes iguales".



a ¿Cómo podrían explicar lo que pasó?

b ¿Cómo escribirían el mensaje para que Ana pueda dibujar una figura igual a la que dibujó Marisa, sin equivocarse?

3 **a** Escriban un mensaje para esta figura

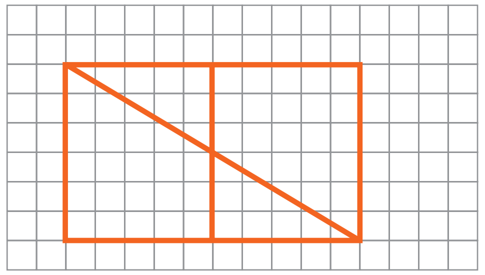


b Este es el mensaje que envió uno de los grupos. Dibujen cómo era la figura:

Dibujen un cuadrado que tenga 4 lados iguales, todos de 5 cuadraditos, y cuatro vértices. Adentro del cuadrado hay una diagonal.

4 En este mensaje hay datos de sobra. Márquenlos con una cruz y justifiquen por qué sobra cada uno.

- **Dibujen un rectángulo que tenga 4 lados y 4 vértices.**
- **Las medidas de los lados son 5 cm y 3 cm.**
- **Dos de los lados tienen una medida y los otros dos tienen otra.**
- **El rectángulo tiene una diagonal que va de vértice a vértice.**
- **Empieza en el vértice de arriba y termina en el de abajo, a la derecha.**
- **Tiene una línea que va desde la mitad de un lado largo hasta la mitad del otro.**



Análisis de las tareas que se proponen y las prácticas que permiten desarrollar

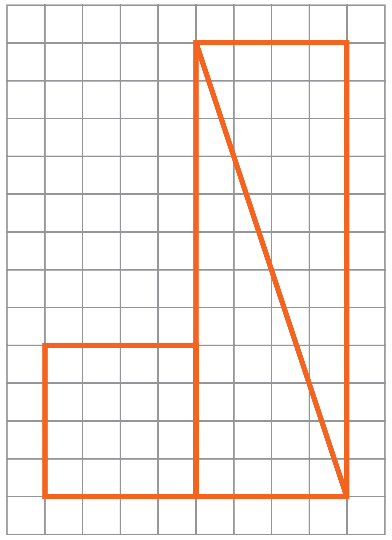
En la actividad 1, la primera tarea que se propone es copiar con regla, una “copia con modelo presente” en papel cuadriculado; a su vez se incorporan preguntas que apuntan a analizar la copia comparándola con el modelo dado. Al comparar con la propuesta para el grupo amarillo, se complejiza la tarea por la inclusión de más de una figura y por las posiciones en las que se presentan.

En el resto de las actividades, las tareas son del tipo “dictado de una figura”, pues hay que comparar un mensaje con dos dibujos, escribir un mensaje y, por último, analizar un mensaje para corregirlo. El dictado de figuras, da lugar a la producción e interpretación de mensajes con información sobre las figuras, lo que requiere de la explicitación de relaciones, permitiendo el avance en el uso del vocabulario geométrico, en la consideración de las distintas relaciones y en mostrar la necesidad de notación específica para nombrar los diferentes elementos. En estas actividades la validación de los mensajes producidos se realiza al comprobar que son comprendidos por los interlocutores y que permiten construir la figura dictada.

Por último, el instructivo con un uso adecuado de términos geométricos funciona como modelizador de ese uso.

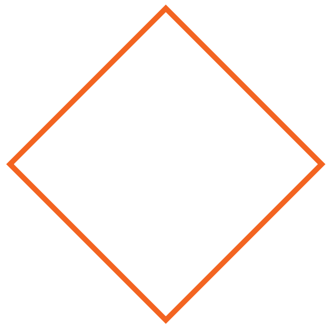
Describiendo Figuras

1 **a** Copiá este dibujo en una hoja cuadriculada. Podés usar regla y/o escuadra.

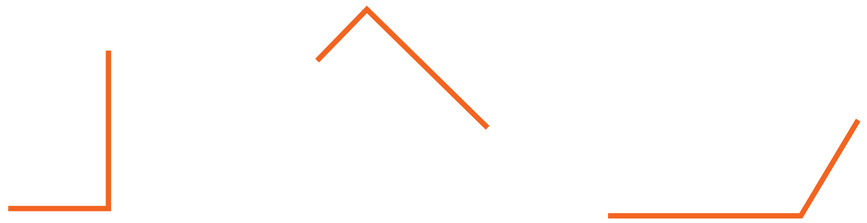


b Ahora tenés que copiar ese mismo dibujo, pero en hoja lisa.

2 **a** Matías dice que esta figura no es un cuadrado, pero Sofía dice que sí.
¿Quién tiene razón?
¿Cómo podés estar seguro?

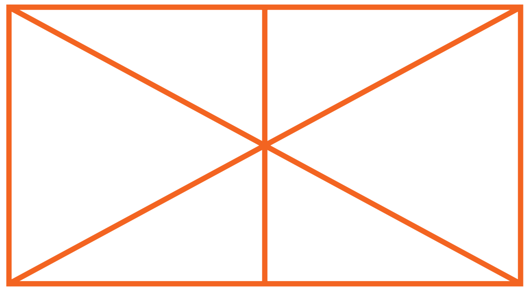


b Intentá completar estos dibujos para obtener un cuadrado.



3 Describan esta figura para que un compañero pueda dibujarla y que al superponerla coincidan exactamente:

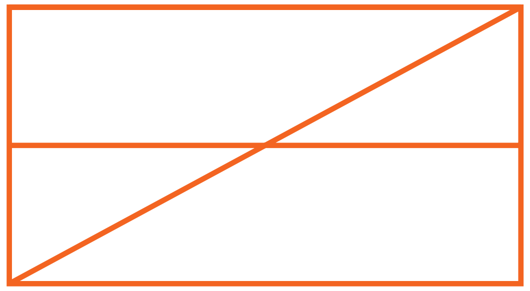
Sugerimos realizarlo en pequeños grupos



4 Les presentamos tres descripciones para hacer la siguiente figura.

a Analicen en qué se parecen y en qué se diferencian.

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos



GASTÓN
Trazá un rectángulo.
La base mide 12 cm.
La altura mide 4 cm.
Hacé una raya acostada justo en la mitas de la altura.
Hacé otra raya que una la punta de abajo a la izquierda con la punta de arriba a la derecha.

IRINA
Trazá un rectángulo de 12 x 4 cm.
Dividilo por la mitad para que te queden dos rectángulos acostados.
Dividilo por la mitad para que te queden dos triángulos.

MARCELA
Hacé una figura de cuatro lados.
Dos lados miden 12 cm (los parados) y dos lados miden 4 cm (los acostados).
Está partido al medio en dos rectángulos acostados.
Tiene una diagonal.

b Ahora elaboren entre todos una descripción que tome lo más adecuado de cada una.

Análisis de las tareas que se proponen y las prácticas que permiten desarrollar

Las primeras tareas que se proponen son de "copia con modelo presente", primero en papel cuadriculado y luego se pasa a la hoja lisa, con lo que se inicia la consideración de los ángulos rectos, el uso del compás para transportar la medida de un segmento y el trazado de perpendiculares y paralelas.

Luego, en las actividades 3 y 4, se proponen tareas de "dictado de figuras", una para escribir un procedimiento de construcción y otra para describir una figura. La figura que se propone copiar es más compleja que las de la propuesta para el grupo naranja pues incluye diagonales y bases medias.

¿Qué conclusiones matemáticas se pueden obtener de las actividades en las fichas?

Desde el enfoque que se propone, los problemas geométricos permiten a los alumnos ir construyendo para cada figura y cuerpo un conjunto de propiedades que los caracterizan. Ahora bien, como se vió anteriormente, es posible pasar de tareas de copia y armado y desarmado de figuras, en las que las propiedades están implícitas, a tareas de producción e interpretación de mensajes donde se explicitan sus propiedades. Esa explicitación de los conocimientos en términos a la vez comprensibles por los niños y matemáticamente adecuados, es lo que los alumnos deben recordar a futuro para poner en juego en nuevos problemas y para establecer relaciones entre los diferentes conocimientos que manejan. Estas explicitaciones de conocimientos son denominadas conclusiones matemáticas de la clase. **Conviene, entonces, incluir en la planificación actividades de sistematización de los conocimientos construidos, que den lugar a la escritura de esas conclusiones.**

Para cada propuesta, es posible pensar en conclusiones matemáticas ligadas a la pregunta del título que orienta tanto la actividad del estudiante como la intervención docente. Por ejemplo:

Para la propuesta "Comparando figuras", esa pregunta es ¿Cómo se dibujan el cuadrado y el rectángulo?

Con lo desarrollado en la propuesta podría responderse:

> *"para dibujar un cuadrado hay que hacer cuatro lados iguales" y "para dibujar el rectángulo hay que hacer dos lados largos y dos lados cortos".*

Para la propuesta "Elaborando mensajes", con la pregunta: ¿Cómo se escribe un mensaje para dibujar el cuadrado y el rectángulo?, la respuesta sería:

> *"hay que escribir que el cuadrado tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos" y que "el rectángulo tiene cuatro ángulos rectos y dos pares de lados iguales".*

Para la propuesta "Describiendo figuras", la pregunta es: ¿Cómo se construyen cuadriláteros con ángulos rectos y cómo se explicitan los procedimientos? La respuesta debe contener un paso a paso donde se incluya el trazado de perpendiculares y paralelas, como por ejemplo:

Para el rectángulo con lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de 5 cm y lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de 3 cm:

- Trazar una semirrecta y transportar con compás la medida del segmento $\overline{AB}$
- Trazar una perpendicular a $\overline{AB}$ por A y otra perpendicular a $\overline{AB}$ por B
- Transportar desde A y desde B sobre cada perpendicular, con compás, la medida de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.
- Trazar el segmento $\overline{CD}$.

Al escribir las conclusiones siempre habrá que considerar que, tanto en su contenido como en el modo de expresarlas, estén "cerca" de lo producido en la clase de modo que los niños puedan reconocer en esos textos los conocimientos que ellos construyeron. Luego, será el momento de que el docente introduzca términos adecuados y revise la redacción para que resulte comprensible para todos.

Dado que entre las figuras de cuatro lados los cuadrados y los rectángulos son las más conocidas por los niños, es posible considerarlas en las primeras propuestas de estudio específico de las propiedades de las figuras.

Los contextos de las actividades geométricas

En este apartado se analizarán contextos posibles para las actividades con figuras. Y continuando con el estudio de las figuras geométricas que iniciamos, se pondrá el foco en el análisis de las tareas incluidas en dos grupos de propuestas didácticas para tres niveles en el aula.

¿Qué contextos usamos para los problemas geométricos?

En general, en la escuela primaria se inicia el estudio geométrico partiendo de las formas que se perciben en el mundo para, luego, pasar de su reconocimiento perceptivo al estudio de las propiedades de las figuras y los cuerpos geométricos.

Esas propiedades describen las características de las figuras y los cuerpos y determinan los dibujos que los representan, pero son independientes de las mediciones efectivas de ellos. Sin embargo, para comenzar, es necesario apoyarse en objetos de diferentes formas, dibujos y mediciones.

En la vida cotidiana las formas están presentes en todo tipo de objetos e imágenes, en el diseño arquitectónico de espacios urbanos y rurales, en edificios y puentes, en carteles, libros y espacios virtuales. En todos los casos es posible reconocer figuras simples o combinadas, con nombre conocido o sin él. Resulta entonces que, en nuestro trabajo como docentes, es posible partir de considerar esas formas en la realidad para proporcionar un primer contexto extramatemático que permitirá otorgar sentido al estudio de las formas. Así, por ejemplo, banderines triangulares, tapas de mesa rectangulares, terrenos cuadrados, cajas en forma de cilindro o de paralelepípedo, o ruedas circulares son algunos de los elementos que permiten plantear situaciones para el estudio de esas figuras y cuerpos.

También resulta interesante, como contexto para el trabajo geométrico en el aula, considerar los objetos producidos por los pueblos originarios, como un modo de mostrar que el interés del hombre por producir distintas formas tiene muchos años de historia y ha dejado huellas culturales que aún se mantienen vigentes.

En las vasijas de cerámica, en los tejidos para mantas, cestas o cintas y también en las joyas, los pueblos que habitaban nuestra tierra desde antes de la llegada de los españoles, utilizaron distintas formas. Así, tanto los diaguitas como los comechingones, los pampas o los guaraníes, a veces producían objetos que representaban animales, plantas u otros elementos de la naturaleza. Otras veces, pintaban diseños en los objetos o los teñían con pinturas o tintes de diferentes colores, que obtenían moliendo hojas, raíces, huesos de animales, etc.

Los pocos ejemplos de objetos que muestran estas imágenes dan cuenta tanto de líneas curvas como rectas, de formas con bordes curvos como otras cuadradas, rectangulares o triangulares.

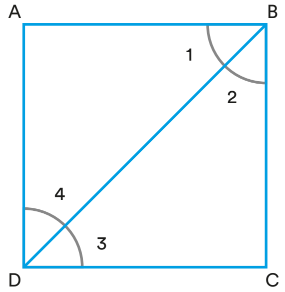
Sin embargo, tal como se ha planteado, avanzar en la construcción de sentido de los conocimientos matemáticos supone, necesariamente, abordar también problemas en contextos internos a la matemática y establecer la validez de afirmaciones de orden cada vez más general. Entonces, es necesario incluir, entre las actividades a realizar en clase, situaciones en las que las figuras son consideradas como tales, es decir, por sus propiedades. Por ejemplo: la propiedad que indica que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°, no es una afirmación que se obtenga por la medición y suma de los mismos. Es más, si se intenta hacerlo, como toda medición involucra un cierto error, es posible obtener como resultado 181°, 179° o 178°, dependiendo de los instrumentos, el trazo del dibujo, el observador, etc.

Antes de avanzar, se puede ver a continuación una manera posible de llegar a esta conclusión partiendo de algunas propiedades ya conocidas de cuadrados y rectángulos: todos sus ángulos son rectos y al trazar una diagonal, quedan determinados dos triángulos iguales.

Diaguitas. Detalle de la vitrina dedicada a la cultura del valles calchaquíes .Museo de La Plata. Argentina. Foto: Claudio Elias (CC0).

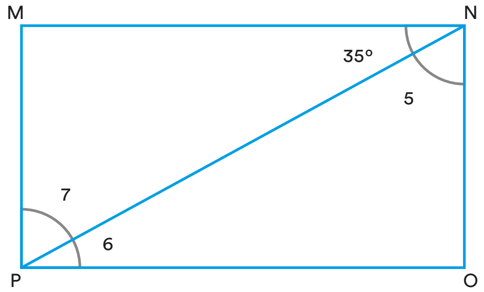
Diaguitas. Escudilla decorada. Colección digital, Museo de Historia Natural Concepción, Chile.

Guaraníes. Tejido chiriguanae izoceño. Santa Cruz, Bolivia.. Foto: Babaserrate (CC BY-SA 3.0).

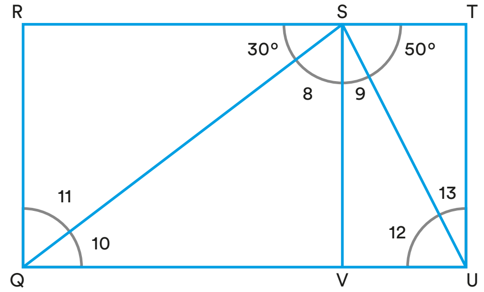


Sabiendo que ABCD es un cuadrado, ¿qué medidas tienen los ángulos de los triángulos DAB y DCB? ¿Se modificaría la respuesta si ABCD en lugar de ser un cuadrado fuera un rectángulo? ¿Por qué?

Si ahora tenemos un dato más, ¿qué medidas tienen los ángulos que están numerados en las figuras?



Entonces, para el caso de triángulos rectángulos es fácil advertir que la suma de sus ángulos interiores es de 2 rectos. Luego se podrá avanzar explorando qué ocurre con otros triángulos.



¿Qué medidas tienen los ángulos que están numerados en la figura?¿Cuánto miden los ángulos interiores de QSU?

Obtener la medida de estos ángulos, sin medir, contribuye a ir avanzando en la generalización de la propiedad.

Para llegar a un tipo de trabajo como este, es necesario ir dejando progresivamente el apoyo en las evidencias perceptivas. Tal es el caso de algunas de las actividades de construcción incluidas en las propuestas que requieren producir un procedimiento de resolución, explicitar lo realizado mencionando los elementos y propiedades involucrados, y validar los conocimientos que se van construyendo en función de los conocimientos disponibles.

¿Qué tareas es posible plantear para estudiar los triángulos? ¿Qué conclusiones matemáticas se pueden obtener?

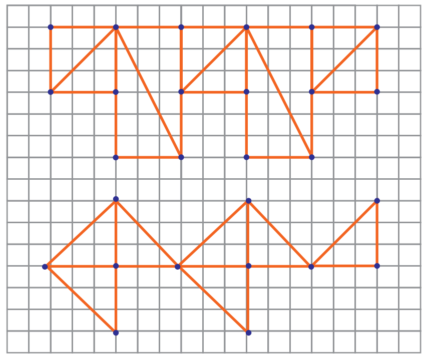
Se presentan a continuación tres propuestas para estudiar los triángulos, elaboradas para grupos de niños con diferentes conocimientos. También aquí, para cada propuesta, es posible pensar en conclusiones matemáticas ligadas a la pregunta del título que orienta tanto la actividad del alumno como la intervención docente.

Propuesta 6
Triángulos

¿Cómo son los triángulos?

1 Los pueblos originarios del territorio argentino adornaban sus telas y vasijas con guardas con figuras de formas distintas. En estas guardas usaron triángulos.

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos



Para adornar el salón, van a armar dos guardas como las del dibujo usando dos tiras largas de papel y recortando triángulos.

a Repartan para todos hojas cuadradas y rectangulares de distintos colores y tijeras.

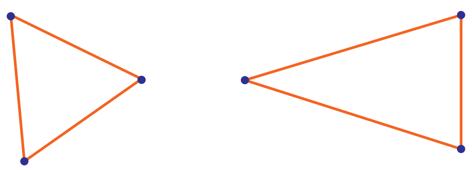
b Doblen un papel con forma de cuadrado de modo que se formen dos triángulos y otro papel con forma de rectángulo, también de modo que se formen dos triángulos. Corten por las líneas que se marcan.

c ¿En qué se parecen los triángulos que tienen? ¿En qué son diferentes?

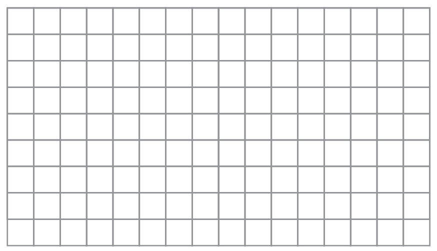
d En tiras de papel blanco, peguen los triángulos formando las guardas del dibujo.

e Comparen la guarda copiada con la original y vean si tienen diferencias.

2 **a** ¿Te parece que estos triángulos podrían estar entre los recortados? ¿Por qué?



b Dibujá los triángulos como los recortados en una cuadrícula como ésta:



c Mariela dice que algunos triángulos tienen “una esquina” y otros no. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

3 Completen las frases siguientes en un papel afiche para el aula.

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

Para armar cuadrados se pueden usar dos triángulos...
Para armar rectángulos se pueden usar dos triángulos...

4 **a** En un papel con forma de cuadrado dibujen dos líneas (que unan los vértices enfrentados) para que se formen cuatro triángulos. Corten por las líneas dibujadas y comparen los triángulos.

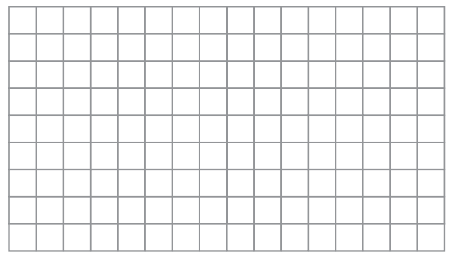
Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

b Hagan lo mismo en otro papel con forma de rectángulo. Corten por las líneas dibujadas y tendrán cuatro triángulos. ¿En qué se parecen? ¿En qué son distintos?

c Comparen los triángulos recortados del cuadrado con los del rectángulo. ¿En qué se parecen? ¿En qué son distintos?

d Escriban un mensaje para que un compañero descubra cómo son los nuevos triángulos.

5 María dice que con los triángulos recortados se pueden armar otros triángulos más grandes. Prueben ustedes y dibujen en una cuadrícula como ésta los triángulos que pudieron armar. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar?



Análisis de las tareas que se proponen y las prácticas que permiten desarrollar

En la primera actividad, la tarea que se propone es la de obtener dos tipos de triángulos rectángulos, plegando cuadrados y rectángulos por sus diagonales. Luego, se propone el copiado de una guarda con los triángulos obtenidos, con lo que los estudiantes deberán reconocer cuál de los triángulos ubicar en cada lugar de la serie y en qué posición hacerlo. Aquí habrá que atender al tamaño del papel para que luego puedan dibujarse los triángulos obtenidos en papel cuadriculado.

La segunda actividad apunta a diferenciar los triángulos “con esquinas”, es decir los triángulos rectángulos de los que no lo son. Para ello, deberán comparar los triángulos recortados con otros dibujados que no tienen ángulo recto y luego dibujar los recortados en una cuadrícula.

En la tercera actividad se propone que los niños analicen con qué triángulos rectángulos recortados es posible armar cuadrados y rectángulos —es decir, las figuras originales— lo que permitirá que posteriormente expliciten la relación entre ellos. Por ejemplo: para armar cuadrados necesitamos triángulos que tengan “una esquina” y dos lados iguales.

En la actividad siguiente se vuelven a recortar un cuadrado y un rectángulo pero esta vez con dos diagonales. En el caso del cuadrado, permite obtener cuatro triángulos rectángulos isósceles iguales, y en el caso del rectángulo, también cuatro triángulos isósceles pero no rectángulos. El análisis de estos triángulos y la escritura de un mensaje darán lugar a la explicitación de sus características.

Por último, se propone armar nuevos triángulos con los recortados para ampliar la cantidad y variedad de estas figuras y sus respectivas descripciones en el repertorio de los niños.

La pregunta que orienta el conjunto de actividades es: ¿cómo son los triángulos?

Las conclusiones matemáticas que se esperan obtener con lo desarrollado en la propuesta anterior se refieren a la diferenciación entre triángulos rectángulos y no rectángulos, y entre triángulos con tres o dos lados iguales y triángulos que no tienen lados iguales, lo que se podría expresar de la siguiente manera:

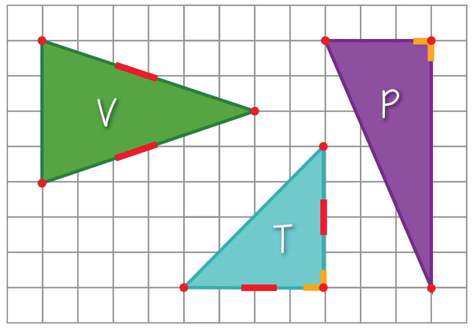
- "Algunos triángulos tienen un ángulo recto".
- "Algunos triángulos tienen dos lados iguales, otros tres lados iguales y otros ningún lado igual".

Si bien en las actividades de esta propuesta se da lugar al desarrollo de procedimientos para dibujar triángulos, las explicitaciones sobre ellos quedan a nivel oral.

¿Cómo son los triángulos? ¿Cómo se pueden dibujar?

Para elegir un banderín para el equipo de fútbol, los chicos dibujaron tres modelos posibles y probaron dónde quedaba mejor el cartel con el nombre.

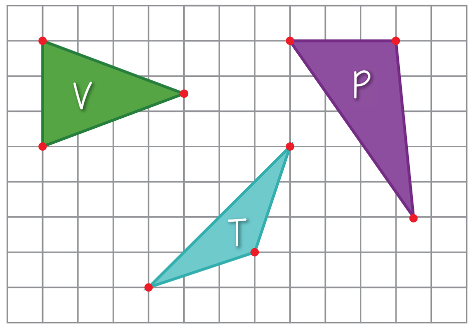
1 Copiá los triángulos en papel cuadriculado para que coincidan al superponerlos.



a Compará cada figura original con la copia que hiciste ¿Qué tienen de distinto? ¿En qué se parecen?

b ¿Cuál elegirías para un banderín?

2 Esta es la copia que hizo Cristina de los banderines V, T y P.



a En esta copia, ¿qué dibujó Cristina igual al modelo? ¿Qué dibujó distinto?

b ¿Qué le dirías para que lo arregle?

3 a Escriban un mensaje para contarle por teléfono a un compañero como son los triángulos V, P y T para que les ayude a elegir uno.

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

b Cristina escribió mensajes para que su compañero pudiera dibujar dos de los tres triángulos. ¿Cuáles son los triángulos de los mensajes?

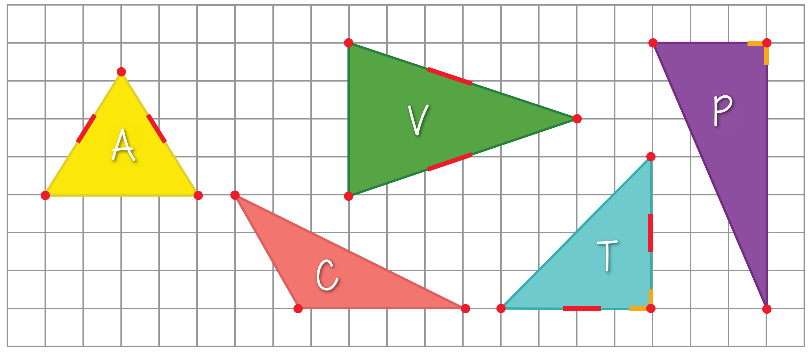
Dibujen un lado de 4 cuadritos de largo.
Después suban desde la mitad del lado 8 cuadraditos y marquen un punto.
Unan con líneas ese punto con las puntas del lado que hicieron primero.

Dibujen un lado de 4 cuadritos y otro lado de 4 cuadritos formando esquina.
El otro lado lo dibujan uniendo las dos puntas de los otros dos lados.

c Vuelvan a escribir los mensajes de Cristina usando las letras A, B, y C para nombrar los vértices de los triángulos.

4 a Pongan al lado de cada cartel la letra del triángulo dibujado que corresponde

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos



Tengo dos lados iguales y un ángulo recto.

Tengo un ángulo recto y tres lados distintos.

Tengo dos lados iguales y ningún ángulo recto.

Tengo dos lados iguales y un ángulo recto.

b Pongan la letra que identifica cada triángulo en la tabla.

Lados	Triángulos	Ángulos	Triángulos
Tiene tres lados iguales		Tres ángulos iguales	
Tiene dos lados iguales		Dos ángulos iguales	
No tiene lados iguales		Un ángulo recto	

Análisis de las tareas que se proponen y las prácticas que permiten desarrollar

Como inicio, en las actividades 1 y 2, se propone la tarea "copia con modelo presente" con regla, en papel cuadriculado. En ambas actividades se promueve el análisis de la copia con la figura original, explicitando semejanzas y diferencias. Sin embargo en la actividad 2 se analiza una copia con error, lo que posibilitará poner de relieve propiedades de los triángulos.

En la tercera actividad se pide describir triángulos distintos, luego analizar unos mensajes con instrucciones y, por último, reescribir mensajes usando una notación para los vértices de los triángulos, de modo de advertir cómo esa notación facilita la manera de referirse a los distintos elementos de los triángulos.

Es importante que el docente recupere el trabajo en relación a estas notaciones, haciendo hincapié en la ventaja de su utilización, y advertir acerca de las marcas sobre las figuras para indicar lados iguales y ángulos rectos, que se retoman en la actividad 4 para identificar diferentes triángulos.

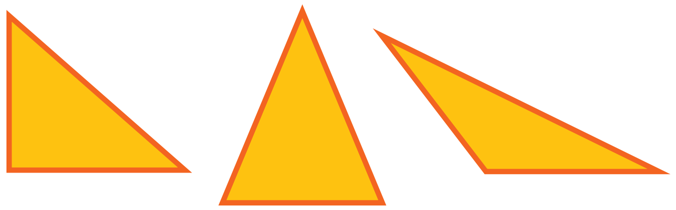
Este conjunto de actividades está orientado por las preguntas: ¿cómo son los triángulos?, ¿cómo se pueden dibujar? Las conclusiones matemáticas a las que se espera arribar son las descripciones de los distintos tipos de triángulos y su identificación en un dibujo, mediante notaciones convencionales tales como la indicación de ángulos rectos y lados iguales con sus respectivas marcas.

Asimismo, son parte de las conclusiones las descripciones de los dibujos para su representación, por ejemplo:

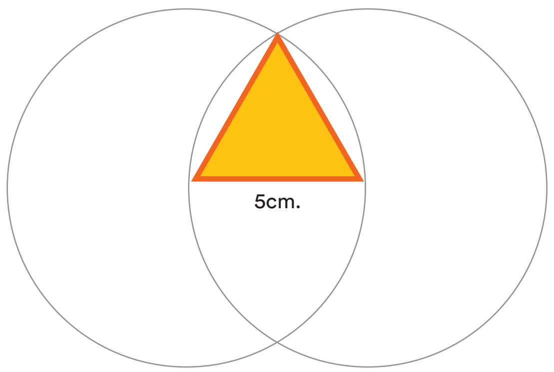
> *"Para dibujar un triángulo isósceles rectángulo usá una hoja cuadriculada, trazá primero los dos lados iguales sobre las líneas de la hoja formando un ángulo recto y después uní los dos extremos de los lados para que quede el tercer lado."*

¿Cómo se dibujan los triángulos sabiendo la medida de sus lados? ¿Cuáles son las medidas posibles que pueden tener los lados de un triángulo?

Para elegir un banderín para el equipo de fútbol, los chicos encontraron tres modelos posibles en un catálogo. Se trataba de los siguientes triángulos:



1 Lionel dice que a él le gusta más otro modelo de triángulo para el banderín que es uno con los tres lados iguales y lo dibujó en papel liso haciendo cada lado de 5 cm. Para hacerlo usó regla y compás.



a Copiá la construcción.

b Compará la construcción con el modelo y consultá con un compañero para ver si les salió igual.

2 Lionel dice que para hacerlo él procede así:

- **Comienza trazando un lado de 5 cm con la regla y lo llama AB.**
- **Luego toma la medida de ese segmento con el compás y traza dos circunferencias, una con centro en A y otra con centro en B.**
- **Las dos circunferencias se cortan en dos puntos C y D.**
- **Luego une A con C y B con C.**

a ¿Es seguro que con el procedimiento de Lionel los tres lados son iguales? ¿Por qué?

b Analía dice que con el procedimiento de Lionel se construyen dos triángulos iguales. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

c ¿Qué cambiarían al procedimiento para que el triángulo construido tenga sólo dos lados iguales?

3 Con sorbetes y piolines o con palitos y plastilina podés armar el contorno de muchas figuras.

Ya saben que se puede armar un triángulo con tres palitos iguales, con dos iguales y uno distintos o con los tres distintos. Pero, ¿da lo mismo elegir palitos de cualquier tamaño?

a Si tienen un palito de 8 cm y otro de 7 cm, ¿cuál es la medida más chica que puede tener el tercer palito? ¿Por qué?

b ¿Y la más grande? ¿Por qué?

c ¿Con cuáles de las siguientes medidas se puede hacer la construcción?

Lado AB	Lado BC	Lado CA	¿Sí o no?
12 cm	7 cm	4 cm	
12 cm	7 cm	4,5 cm	
12 cm	7 cm	5 cm	
12 cm	7 cm	5,5 cm	
12 cm	7 cm	6 cm	
6 cm	3 cm	10 cm	
6 cm	3,9 cm	10 cm	
6 cm	4 cm	10 cm	
6 cm	4,1 cm	10 cm	
6 cm	4,5 cm	10 cm	

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

4 **a** Anoten en la tabla tres posibilidades de lados que permitan armar un triángulo.

Lado AB	Lado BC	Lado CA

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

b ¿Cómo los eligieron?

c Escriban una recomendación para elegir tres lados que permitan armar un triángulo.

Análisis de las tareas que se proponen y las prácticas que permiten desarrollar

Uno de los propósitos de esta propuesta es que los alumnos puedan construir un triángulo con compás, dados sus tres lados, y que puedan justificar la construcción del mismo, es decir, explicar por qué el punto que resulta de la intersección de las dos circunferencias es el tercer vértice del triángulo.

En la primera actividad, la tarea que se propone es la copia de una construcción de un triángulo equilátero ya realizada con regla y compás. Se trata de una construcción que parte de la medida del lado en la que se ven las marcas de cada paso, pero hay que decidir en qué orden hacerlos.

En la segunda actividad, se presenta un instructivo de construcción para ser analizado, el que al mismo tiempo incorpora notación para identificar sus elementos y avanza en la ampliación del lenguaje geométrico. Posteriormente, se solicita que lo modifiquen para construir un triángulo isósceles y que justifiquen los cambios.

En las dos últimas actividades, las tareas que se proponen implican el análisis de conjuntos de datos. En la tercera actividad, a partir de una situación experimental, se espera la elaboración de una conjetura y alguna justificación de orden práctico. Y, en la última, la puesta en juego de esa conjetura y la enunciación de las condiciones que deberán satisfacer las longitudes de los lados de un triángulo para que éste pueda ser construido.

Al analizar la propuesta anterior, se identifican dos preguntas que la orientan: ¿cómo se dibujan los triángulos sabiendo la medida de sus lados? y ¿cuáles son las medidas posibles que pueden tener los lados de un triángulo? La respuesta a la primera, es la explicitación del procedimiento paso a paso y a la otra, la explicitación de la condición que deben cumplir tres segmentos para poder ser lados de un triángulo.

A modo de conclusión, se espera que los niños puedan elaborar un instructivo en el primer caso y, para el segundo, formulaciones del tipo: *"la medida de cada lado tiene que ser mayor que la resta de las medidas de los otros dos"* y *"la medida de cada lado tiene que ser menor que la suma de las medidas de los otros dos"*.

Se advierte entonces, en el conjunto de las tres propuestas, un trabajo progresivo en relación a la construcción de triángulos (tipo de papel e instrumentos que se utilizan, variedad de triángulos que se construyen y analizan), en las formas de describirlos y de explicitar los procedimientos de construcción, en particular dados los tres lados. Asimismo, hay un primer acercamiento a la condición que la medida de esos lados deben cumplir.

¿Qué contextos se proponen en estas propuestas?

Las propuestas se inician con una o dos actividades en el contexto extramatemático y las demás son en contexto intramatemático. En el caso de la propuesta del grupo amarillo el contexto extramatemático es el de construir guardas y en las propuestas del grupo naranja y roja de la elección de un banderín.

Por último, es necesario resaltar la importancia de la presentación, de modo equilibrado, de los contextos intramatemáticos y extramatemáticos para el abordaje de los temas, dado que si todas las actividades refieren a usos de los conocimientos matemáticos en contextos extramatemáticos, se limita la posibilidad de identificarlos, relacionarlos con otros y reutilizarlos en nuevas situaciones. Por otro lado, un trabajo puramente en contextos intramatemáticos obstaculiza la construcción de sentido y la identificación de los problemas que dieron origen a esos conocimientos y sus razones de ser, impidiendo reconocer cuándo usarlos y cuándo no.

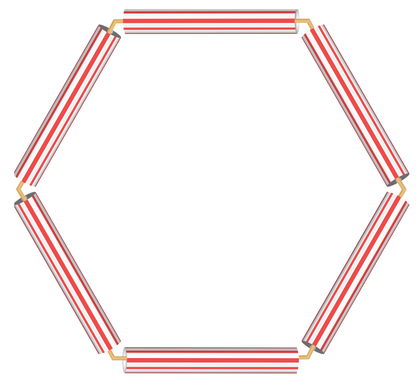
¿Qué tareas es posible plantear para estudiar los cuadriláteros? ¿Qué conclusiones matemáticas se pueden obtener?

Anteriormente se presentaron propuestas para estudiar el cuadrado y el rectángulo como aquellas figuras que pueden iniciar el estudio de cuadriláteros. A continuación se presentan tres propuestas para ampliar el conjunto de cuadriláteros conocidos. La idea es "mover" los lados de cuadrados y rectángulos, cambiando los ángulos –para obtener otras figuras– y cambiando el orden de los lados. También aquí, para cada propuesta, es posible pensar en conclusiones matemáticas ligadas a la pregunta del título que orienta tanto la actividad del alumno como la intervención docente.

Propuesta 7
Otros cuadriláteros

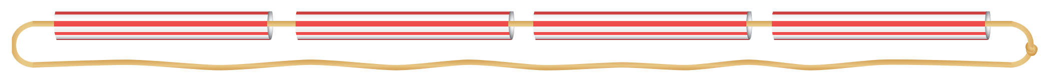
¿Cómo cambian las figuras?

1 Con sorbetes y piolines pueden armar el contorno de muchas figuras. Para hacerlo hay que pasar el piolín por el centro de los sorbetes, uno a continuación del otro y luego atar los extremos.

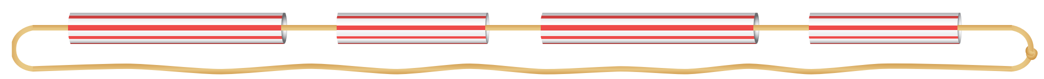


Consigan doce sorbetes de 8 cm, otros doce de 12 cm y un rollo de piolín para armar figuras y luego dibujarlas.

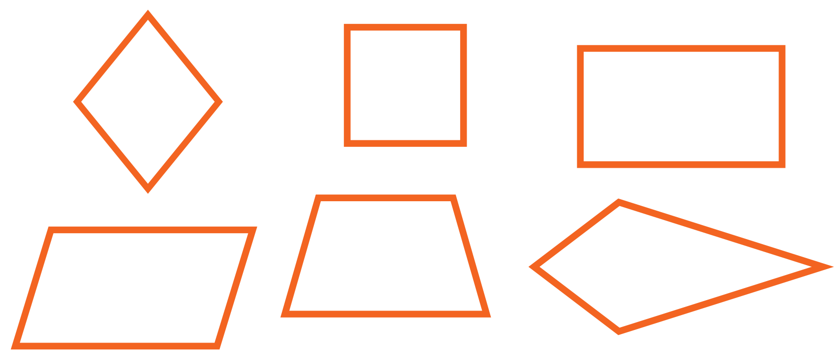
a Armen dos o tres figuras con 4 sorbetes iguales. ¿En qué se parecen? ¿En qué son distintas?



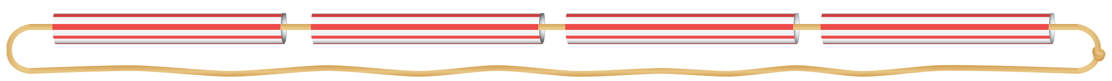
b Armen dos o tres figuras con 4 sorbetes ubicados del siguiente modo: uno largo, uno corto, uno largo y uno corto. ¿En qué se parecen? ¿En qué son distintas?



2 ¿Alguna de las siguientes figuras se parece a las que armaron? ¿Por qué?



3 ¡Ahora vamos a armar figuras y a dibujarlas en papel cuadriculado!



a Armen figuras con 4 sorbetes iguales, apoyen cada una en papel cuadriculado y marquen los vértices. Dibujen las figuras con regla. ¿Cuántas figuras distintas pueden armar? ¿En qué son distintas?

b Armen figuras con 4 sorbetes ubicados del siguiente modo: uno largo, uno corto, uno largo y uno corto. Apoyen cada una en papel cuadriculado y marquen los vértices. ¿Cuántas figuras distintas pueden armar? ¿En qué son distintas?

c Comparen las figuras dibujadas con las de sus compañeros y calquen todas las que sean distintas. Armen un papel afiche con todas las figuras.

4 **a** Si un compañero te dice que tiene escondida una figura con 4 lados iguales. ¿Es seguro que se trata de un cuadrado? ¿Por qué?

b Y si te dice que tiene dos lados largos y dos cortos, ¿qué le preguntarías para saber si es un rectángulo?

Sugerimos realizarlo individualmente

Análisis de las tareas que se proponen y las prácticas que permiten desarrollar

En la primera actividad, se propone la tarea de obtener diferentes cuadriláteros con sus cuatro lados iguales y con dos pares de lados iguales y distintos entre sí. Muy posiblemente, los niños obtendrán en primer lugar cuadrados y rectángulos, dado que son figuras que conocen, y a partir de variar los ángulos de éstos, obtendrán rombos y paralelogramos.

Esta producción experimental se comienza a conceptualizar en la actividad 2 al pedir la comparación explícita entre esas figuras y otras conocidas como el cuadrado y el rectángulo, y otros cuadriláteros no tan familiares como el trapecio y el romboide. Cabe señalar que no hace falta que los niños conozcan los nombres de las figuras "nuevas" para establecer las diferencias. En esta etapa se trata de descubrir que hay otras figuras, distintas, pero que mantienen algo en común con las ya conocidas; por ejemplo el rombo tiene los cuatro lados iguales como el cuadrado, pero no tiene sus ángulos rectos.

En la actividad 3, se propone el dibujo en papel cuadriculado de las figuras obtenidas con sorbetes, usando regla, y se solicita que se obtengan varias figuras distintas, manteniendo los lados y cambiando los ángulos.

Por último, la actividad 4 apunta a identificar las diferencias entre cuadrado y rombo, y entre rectángulo y paralelogramo, incorporando aquí los nombres nuevos.

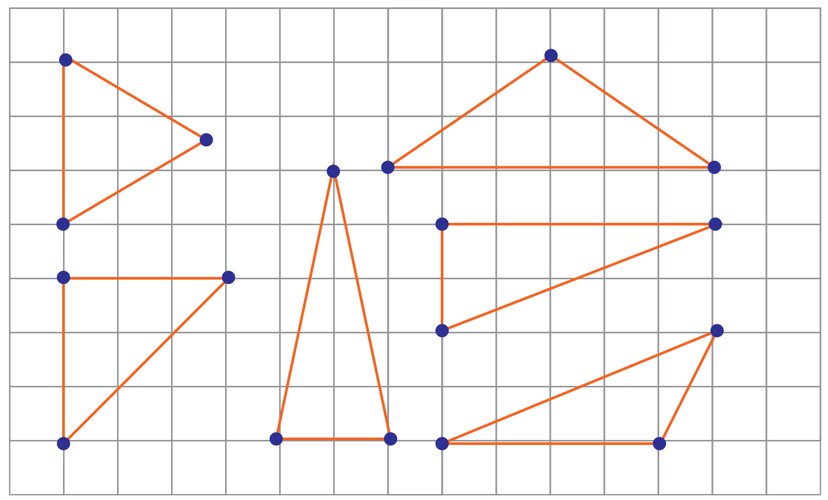
Para la pregunta que titula esta propuesta, "¿cómo cambian las figuras de cuatro lados al variar los ángulos?", las conclusiones a las que se podría arribar luego de realizar las actividades son las que enuncian las diferencias y semejanzas entre pares de figuras. Por ejemplo:

- *"el cuadrado y el rombo se parecen en que los dos tienen los cuatro lados iguales",*
- *"el cuadrado y el rombo no se parecen en que el cuadrado tiene los ángulos rectos y el rombo no".*

Y de manera similar para rectángulo y paralelogramo.

¿Qué otros cuadriláteros se pueden construir? ¿Cómo se construyen?

1 **a** Usando los modelos de triángulos siguientes dibujá en papel cuadriculado todos los cuadriláteros diferentes que puedan con dos, tres o cuatro de los triángulos dibujados. Luego, controlá que la copia sea fiel al modelo consultando a un compañero.



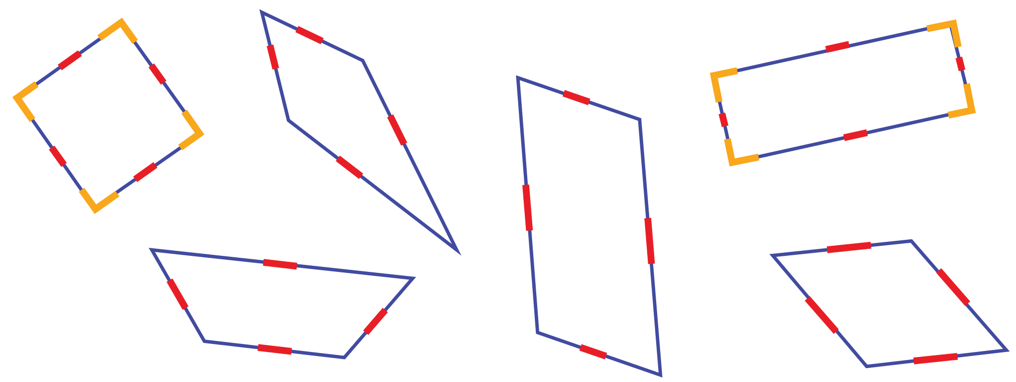
b ¿Cómo sabés cuáles son cuadrados? ¿Y rectángulos?

c Lautaro dice que juntando dos triángulos iguales se pueden armar otras figuras de cuatro lados que no son ni un rectángulo ni un cuadrado. ¿Cómo habrá pensado Lautaro? ¿Estás de acuerdo con él?

2 **a** Busquen entre los cuadriláteros siguientes los que tienen la misma forma que los que dibujaron. ¿Cómo saben que son del mismo tipo?

b Elijan dos y escriban para cada uno una pista para adivinar cuál es.

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos



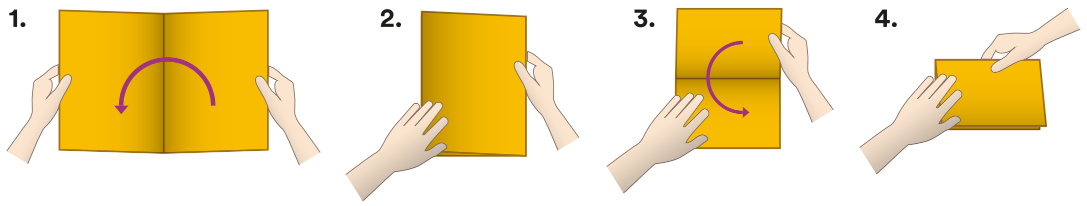
3 a Dibujen en papel liso un rombo que pueda superponerse y coincidir con el que hizo otro grupo, ¿qué datos necesitan?

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

b Comparen el rombo que dibujaron con el de un compañero, ¿son iguales?

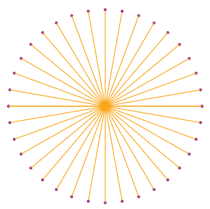
c Si tienen que comparar su rombo con el de un compañero que está en su casa, ¿cómo pueden saber si son iguales?

Para saber cuáles son ángulos rectos y cuáles no, además de una escuadra, podés usar un instrumento de papel que se fabrica doblando una hoja dos veces de modo que coincidan los dobleces y queden 4 ángulos rectos.



Con uno de los ángulos rectos se podrán hacer plegados para que queden marcados dos ángulos de 45°, o uno de 30° y otro de 60° ¿Cómo lo harías? Consultá con tus compañeros.

d Para saber si dos ángulos son iguales, también se pueden medir con la red de ángulos. Una forma para medir de manera aproximada ángulos que no son rectos, es usando una red de ángulos de 10° en 10° como la siguiente. Fijate en el dibujo cómo se ubica la red:



Consigan doce sorbetes de 8 cm, otros doce de 12 cm y un rollo de piolín para armar figuras y luego dibujarlas.

4 Un compañero escribió el siguiente mensaje para construir una figura:

- **Dibujá un segmento AB de 5 cm.**
- **Ubicá el centro de la red en el extremo A del segmento.**
- **Marcá un punto para dibujar otro segmento que empiece en A separado 30 del anterior.**
- **Dibujá el nuevo segmento de 5 cm desde A, segmento AC.**
- **Dibujá una paralela a AB.**
- **Dibujá una paralela a AC.**
- **Llamá D al punto donde se cortan AB y AC.**

a ¿Qué cuadrilátero les permite construir?

b ¿Cómo modificarían el mensaje para que se pueda construir un paralelogramo?

Análisis de las tareas que se proponen y las prácticas que permiten desarrollar

En la primera actividad, la tarea inicial es “armar figuras a partir de otras”. Es decir, armar cuadriláteros con triángulos y dibujarlos. Esta actividad da lugar al establecimiento de relaciones entre las figuras que intervienen, es decir, podrán justificar que las figuras son cuadrados apoyándose en las características de los triángulos que se presentan.

Luego, en la segunda actividad, se propone comparar los dibujos realizados con otros que tienen las marcas para lados iguales y ángulos rectos, lo que permitirá identificar figuras del mismo tipo. Al solicitar que expliquen cómo saben que son del mismo tipo, podrán hacerlo mencionando las propiedades correspondientes en forma oral. Por último, al escribir pistas para adivinar algunas de las figuras, esas propiedades quedarán explícitas.

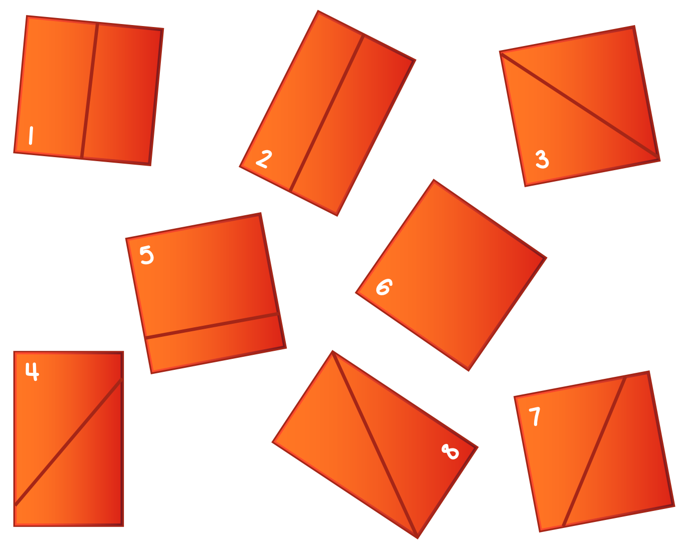
La actividad 3 involucra un “pedido de datos” que apunta a que se explicite que para la construcción de un rombo es necesario determinar la longitud de un lado y la amplitud de un ángulo. Surge entonces la necesidad de medir ángulos y la presentación de dos “instrumentos de medición”, la hoja plegada y la red de ángulos.

Por último, en la actividad 4, será necesario interpretar un instructivo que permite construir un rombo usando regla, compás y la red de ángulos. Luego escribir, en base a éste, otro instructivo con los cambios que permiten construir un paralelogramo.

Al retomar las preguntas “¿Qué otros cuadriláteros se pueden construir? ¿Cómo se construyen?”, se podrán registrar diferentes tipos de conclusiones matemáticas: las descripciones de distintos cuadriláteros considerando las características de sus ángulos y lados y la explicitación de los procedimientos de construcción. También se podrán registrar las características de los instrumentos de medición que se hayan elaborado y el procedimiento para construir ángulos, y cuadriláteros, con esos instrumentos.

¿Cómo son las diagonales de los cuadriláteros?

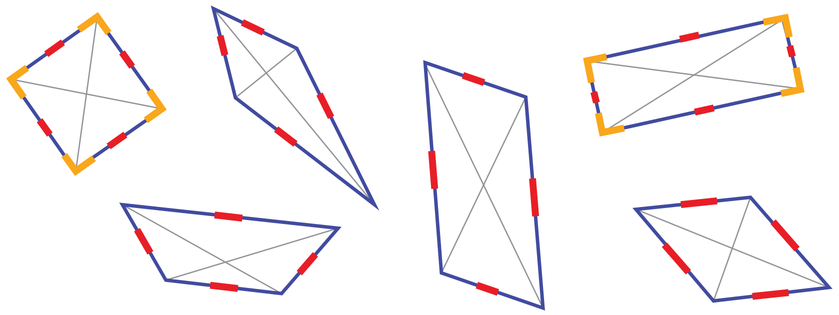
1 Entre los siguientes cuadrados y rectángulos algunos están divididos por una diagonal en dos triángulos. ¿Cómo diferencian la diagonal de los otros segmentos interiores?



2 **a** Analicen los cuadriláteros dibujados con sus diagonales. ¿Qué tipo de triángulos quedan determinados en cada figura por sus diagonales?

b ¿Algunos triángulos son iguales? ¿Por qué?

c En qué casos las diagonales son perpendiculares? ¿Por qué?

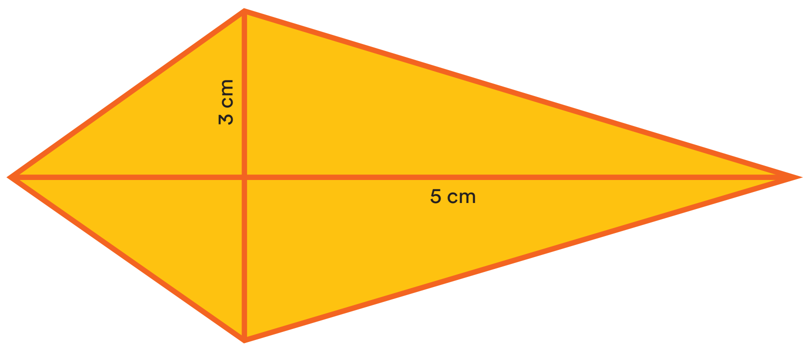


3 **a** Construí en hoja lisa un cuadrilátero cuyas diagonales miden 3 cm y 5 cm, de modo que cada una corte a la otra en el punto medio

b ¿Podés asegurar que la figura que construiste es igual a la que hicieron tus compañeros sin verla? ¿Por qué?

Sugerimos realizarlo individualmente

4 Para que Mariana pudiera construir el romboide sin verlo, los chicos escribieron estos mensajes. ¿Qué información habría que agregarle a cada mensaje para que se pueda obtener el romboide dado?



Javier: Las diagonales son perpendiculares, una mide 5 cm y la otra 3 cm.

Emiliano: Los lados son iguales dos a dos y las diagonales son perpendiculares.

Mariana: Una diagonal mide 5 cm y la otra 3 cm. La mayor corta a la menor por la mitad.

b Otros chicos dijeron que con diagonales de 3 cm y 5 cm también se puede construir un trapecio. ¿Están de acuerdo?

c Revisen todas las figuras que analizaron con las diagonales de 3 cm y 5 cm e identifiquen de qué cuadriláteros se trata. Pueden usar el compás para comprobar si hay lados iguales.

5 Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando todas sus respuestas.

- **Los rombos y los romboides tienen diagonales perpendiculares.**
- **Los rombos y los romboides tienen diagonales iguales.**
- **Los paralelogramos propiamente dichos tienen diagonales iguales.**
- **Los paralelogramos propiamente dichos tienen diagonales que se cortan en sus puntos medios.**

Análisis de las tareas que se proponen y las prácticas que permiten desarrollar

Para abordar las actividades de esta propuesta, es necesario asegurarse de que los estudiantes ya hayan realizado actividades que involucren propiedades de los lados y ángulos de los cuadriláteros, ya que ahora se apunta a estudiar las diagonales de los mismos.

La actividad inicial propone diferenciar la diagonal de otros segmentos interiores de rectángulos y cuadrados. El propósito es la explicitación de unas primeras ideas acerca de este elemento de los cuadriláteros.

En la actividad 2 se presentan los dibujos de diferentes cuadriláteros con sus diagonales, como así también con las marcas correspondientes a lados iguales y ángulos rectos, lo que permite identificar tipos de triángulos. Ante el pedido de justificación de la perpendicularidad de las diagonales, los estudiantes podrán validar mediante la superposición con una hoja plegada que representa un ángulo recto o escuadra, o mediante la medición del ángulo que forma con una red de ángulos o transportador.

Luego, en la siguiente actividad se solicita la construcción de un cuadrilátero a partir de sus diagonales, pero sin información sobre el ángulo entre ellas. De esta manera, resulta una actividad de “construcción a partir de datos”, sin modelo presente, que permite discutir la constructibilidad y la cantidad de soluciones posibles.

La actividad 4 propone determinar qué es necesario agregar a distintos instructivos para dibujar un romboide dado y luego ver si con las mismas diagonales es posible construir un trapecio.

Por último, sobre un conjunto de afirmaciones sobre las propiedades de las diagonales del rombo, romboide y paralelogramo, hay que decidir si son o no verdaderas; lo que resulta una síntesis parcial de lo trabajado en la ficha. Es interesante, en esta etapa, promover la elaboración de argumentos, incorporando el uso de contraejemplos para aquellas afirmaciones que no sean verdaderas. A su vez, se espera que los estudiantes justifiquen la veracidad apoyándose en las propiedades de los cuadriláteros estudiados.

Dado que la pregunta del título es “¿Cómo son las diagonales de los cuadriláteros?”, a modo de conclusión se podrán anotar en un cuadro las propiedades de las diagonales de los cuadriláteros conocidos. Por ejemplo:

FIGURA	Diagonales iguales	Diagonales perpendiculares	Diagonales que se cortan en mitades
Cuadrado			
...			
...			

Juegos y figuras

En esta sección se presentarán algunas alternativas de cómo se pueden incluir juegos en la clase de geometría como un recurso para trabajar con las propiedades de las figuras geométricas.

Así como las actividades de construcción que se han planteado en las secciones anteriores permiten ir conociendo los elementos de las figuras y las propiedades que las diferencian a unas de otras, los juegos dan lugar al uso de las propiedades y a determinar conjuntos de figuras que definen a cada una o a un grupo de ellas. **En este sentido, los juegos son un recurso muy interesante para el docente, ya que permiten, entre otras cuestiones, conocer cuáles son las propiedades que los niños dominan, en una etapa de diagnóstico o como evaluación final.**

En la publicación "Matemática en aulas de plurigrado: el juego como recurso de enseñanza"[9] se incorpora el juego "Detectives de figuras" en el que un equipo anota las características de una figura y el otro hace preguntas para adivinar cuál es. En esta publicación, se presentan otros dos juegos, la "Lotería de figuras" y el "Memotest cantado", y se plantean tres versiones de cada uno, en propuestas cuyos colores respetan el criterio de estar pensadas para tres grupos de alumnos con distintos conocimientos en el aula.

¿Cómo usar los juegos con un propósito didáctico?

El juego está presente en la vida cotidiana de los niños y también de los adultos. Al jugar es necesario interactuar con otros, aceptar reglas, buscar estrategias para tratar de ganar, compartir y cooperar. El juego, en todas sus presentaciones y formatos, es parte del proceso cognitivo y, por lo tanto, un valioso recurso para generar aprendizajes de distinto tipo. El juego tiene además dos grandes ventajas: invita a los estudiantes a participar y todos se involucran en la propuesta, ya que ningún niño cree que no puede jugar, lo que resulta una condición fundamental.

Desde el punto de vista del enfoque didáctico, resulta interesante su inclusión en la clase de matemática, pues al organizar juegos donde cada niño va decidiendo su estrategia, éstos funcionan como un contexto donde en cada turno se resuelve un problema. Si luego de jugar, el docente hace preguntas para reflexionar sobre lo realizado, los conocimientos utilizados al jugar se pueden explicitar. Y si se plantean problemas para "después de jugar" esos conocimientos se ponen en juego en nuevas situaciones. Resulta, entonces, que estas dos instancias tendrán que estar presentes cuando elegimos un juego para que los alumnos aprendan un contenido matemático específico.

Para contemplar en la clase de plurigrado la diversidad de conocimientos de los alumnos, siempre presente pero acentuada en este caso, se han modificado las variables didácticas en los juegos que se presentan, de modo que puedan jugar simultáneamente distintos grupos de alumnos. En este sentido, es interesante analizar a qué conclusiones comunes es posible arribar para plantear luego actividades diferenciadas.

¿Cómo expresar las propiedades de las figuras?

Una cuestión que es necesario considerar en la progresión de los conocimientos sobre las figuras es que los niños comienzan reconociendo su forma de manera perceptiva para ir avanzando en el conocimiento de sus elementos y propiedades. Así, por ejemplo, pasan de reconocer un cuadrado por su dibujo en cierta posición en la hoja de papel, a conocer las propiedades de los lados, los ángulos y las diagonales. En este proceso, van avanzando al identificar una o más propiedades comunes a dos figuras o a un conjunto de figuras y propiedades que diferencian a dos figuras o a un conjunto de ellas.

Cabe señalar que, cuando se enuncian las propiedades, es necesario tener en cuenta la forma de su enunciación en función de su alcance. Por ejemplo, si decimos que una figura tiene "sólo un par de lados paralelos" es que no puede tener más de un par de ellos. En tal caso, los trapecios cumplen con esa propiedad pero no los paralelogramos ni los hexágonos regulares. Y si decimos "al menos un par de lados paralelos" es que puede tener un par o más de un par, por ejemplo un paralelogramo y un hexágono regular tienen tres pares de lados paralelos. Por eso, aunque para el docente la expresión "un par de lados paralelos" significa que puede tener un par o más de un par de lados paralelos, convendrá aclarar cómo se está usando cuando se trabaja con los distintos grupos.

La Lotería de figuras

Este juego se apoya en las reglas conocidas de todo juego de lotería, donde cada jugador debe ir completando su cartón a medida que alguien va leyendo carteles que saca de una caja o bolsa. En este caso, el cartón tiene figuras geométricas y el cartel que se saca de la caja tiene escrita una propiedad de las figuras de los cartones. Estos carteles tienen que ser confeccionados por el maestro o los alumnos más grandes.

La variación en las diferentes propuestas está dada por las propiedades sobre las que se trabaja y la cantidad que se menciona en los carteles para poder identificar las figuras.

Por otra parte, en estas propuestas de juegos se ha considerado que tanto los elementos de las figuras como las propiedades sobre las que se trabaja coincidan con aquellas que se tuvieron en cuenta al pensar las propuestas de construcción de figuras.

9. Disponible en www.fundacionbyb.org/publicaciones

Propuesta 8
El juego de la lotería de figuras

Lotería de figuras: Versión 1

Materiales

6 cartones, 12 carteles y porotos.

Reglas de juego

Se colocan en una bolsa los 12 carteles confeccionados por la maestra con las características de las figuras y se reparte a cada niño que juega un cartón y 6 porotos. En cada partida, uno de los niños va sacando los carteles y leyendo lo que dice.

Cada niño mira si las características que se leen corresponden a una de las figuras que él tiene y, si es así, pone un poroto sobre ella. Gana el que completa primero su cartón.
Los carteles para leer tienen sólo una característica y el chico que los lee elige cómo completar la frase con otra característica cualquiera.

Algunos de los carteles pueden ser:

- Tiene cuatro lados y...

- Tiene tres lados y...

- Tiene cuatro vértices y...

- Tiene tres ángulos y...

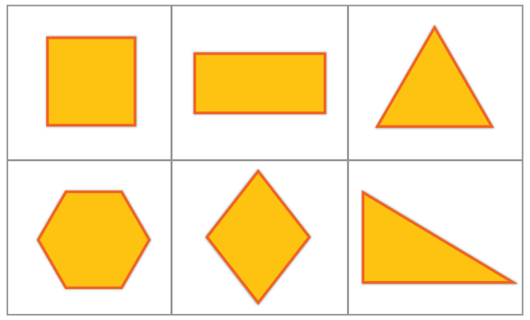
- Tiene lados iguales y...

Después de jugar:

1 Un compañero escribió el siguiente mensaje para construir una figura:

a ¿Qué cuadrilátero les permite construir?

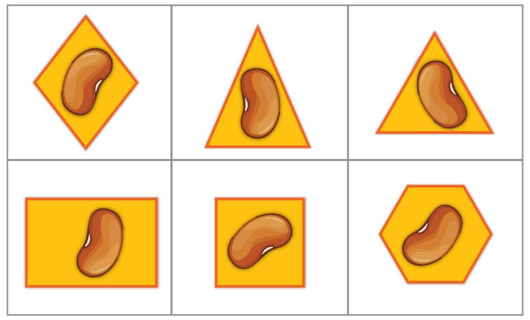
Sugerimos realizarlo en pequeños grupos



- Tiene cuatro lados y son todos iguales.
- Tiene cuatro lados y dos son largos y dos cortos.
- Tiene tres lados y dos son iguales.
- Tiene tres vértices y tres lados iguales.
- Tiene cuatro lados y dos son iguales.
- Tiene cuatro lados y ninguno igual.

b ¿Cómo modificarían el mensaje para que se pueda construir un paralelogramo?

2 Este es el cartón de Ayelén. Ella dice que con los carteles que leyó Sofía, ella ya ganó. ¿Les parece que tiene razón o puso mal algún poroto?

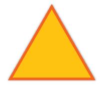


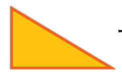
Sugerimos realizarlos en pequeños grupos

3 Para las figuras siguientes:

a Anoten todo lo que saben

 Tiene ....

 Tiene ....

 Tiene ....

 Tiene ....

b Comparen sus respuestas con las de un compañero y vean si escribieron lo mismo. Si no es así, piensen juntos la mejor respuesta.

Análisis de la propuesta

Luego de repartir los cartones se plantean dos posibilidades. En la primera, el niño que lee los carteles sólo dice la propiedad que está escrita. En la variante, agrega una segunda característica que él elige. Se espera que en esa elección los niños tengan en cuenta el número de lados, si son o no lados iguales (de la misma medida), el número de ángulos o de vértices.

También se espera que el uso del vocabulario sea aún algo informal, o poco específico, y que los niños digan “puntas” en lugar de vértices, o “líneas” en lugar de lados. En estos casos, la docente intervendrá aportando el término adecuado para que los niños lo vayan incorporando.

Para los cartones de la propuesta amarilla, los carteles que la maestra podrá confeccionar para poner en la caja son, por ejemplo:

- Sobre el número de lados: “tiene tres lados”, “tiene cuatro lados”, “tiene cinco lados”, etc.
- Sobre los lados iguales: “tiene dos lados iguales”, “tiene tres lados iguales”, “tiene cuatro lados iguales”, “tiene todos los lados iguales”.
- Sobre el número de ángulos: “tiene tres ángulos”, “tiene cuatro ángulos”, “tiene cinco ángulos”

Y los niños que leen los carteles podrán nombrar figuras combinando dos características.

Las actividades que se proponen luego, son las que se denominan “para después de jugar”. Se incluyen dos de juego simulado, una fuera del contexto del juego y una cuarta de ampliación de lo aprendido para relacionar las figuras con formas de objetos de la realidad. En las primeras los niños deben completar un cartón para unos carteles dados y analizar otro completado para decidir si los porotos están bien puestos.

En la tercera actividad, se solicita hacer una lista de propiedades para cuatro figuras y compartirla con sus compañeros, con lo que se espera que tengan para cada figura cuatro propiedades: una referida al número de lados, una referida a lados iguales o no, otra al número de vértices y otra al número de ángulos. Lo que se realiza en esta actividad, se puede volver a plantear para otras figuras de las plantillas y terminar con un repertorio nutrido de triángulos y cuadriláteros asociados a dos o tres características, lo que resulta una posible conclusión del trabajo con el juego y se puede organizar en una “muestra geométrica” en un afiche para colgar en el aula.

Lotería de figuras: Versión 2

Materiales

6 cartones, 12 carteles y porotos.

Reglas de juego

Se colocan en una bolsa los 12 carteles confeccionados por la maestra con características de las figuras y se reparte a cada niño que juega un cartón y 6 porotos.

En cada partida, uno de los niños va sacando los carteles y leyendo lo que dice. Cada niño mira si las características que se leen corresponden a una de las figuras que él tiene y si es así, pone un poroto sobre ella. Gana el que completa primero su cartón.

Algunos de los carteles pueden ser:

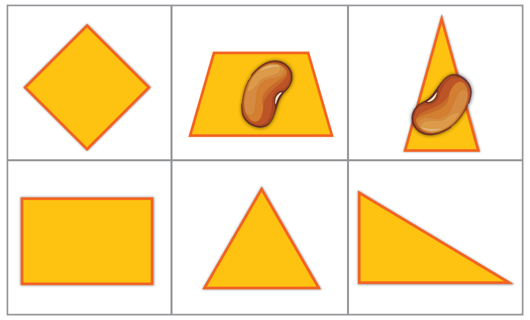
- Tiene cuatro lados y ... (ángulos)
- Tiene tres lados y ... (ángulos)
- Tiene un ángulo recto y ... (lados)
- Tiene tres ángulos y ... (lados)
- Tiene cuatro ángulos rectos y ... (lados)
- Tiene tres ángulos iguales y ... (lados)
- Tiene dos lados iguales y ... (ángulos)

Después de jugar:

1 En el cartón de Guille faltan porotos.

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

a ¿Cómo completarían los carteles para que Guille pueda ubicar los demás porotos?



- **Tiene cuatro lados y ... (ángulos).**
- **Tiene tres lados y ... (ángulos).**
- **Tiene un ángulo recto y ... (lados).**
- **Tiene tres ángulos y ... (lados).**

b Gabriela dice que si en cada caso queda en el cartel el mismo número de lados que de ángulos siempre se puede poner un poroto. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

c ¿En algún caso hay más de una figura que cumpla con las dos características? ¿Cuáles son? Y, ¿qué otra característica las diferencia?

2 a Busquen en un libro de texto o en internet los nombres de las figuras del juego de lotería y anótenlos.

b Conversen sobre por qué reciben esos nombres y consulten sus conclusiones con el docente.

Sugerimos realizarlos en pequeños grupos

3 Elijan algunas figuras dibujadas de la lotería y escriban tres características de cada una.

4 Escriban una diferencia entre las siguientes figuras dibujadas:

Análisis de la propuesta

En relación con la propuesta amarilla, se agrega aquí otra propiedad para elaborar los carteles: el reconocimiento de ángulos rectos o no. En esta versión, el niño que lee los carteles agrega a la propiedad escrita otra que él elige.

Por ejemplo: si dice "tiene cuatro lados y ..." podría agregar "tiene cuatro lados y dos lados iguales", o también "tiene cuatro lados y cuatro ángulos rectos".

Los carteles que los docentes podrán confeccionar para poner en la caja son todos los que corresponden a la propuesta amarilla y además:

- Sobre tipo de ángulos: "tiene un ángulo recto", "tiene cuatro ángulos rectos", "no tiene ángulos rectos".

La propuesta que se presenta para "después de jugar" incluye una actividad de juego simulado, donde se solicita analizar una afirmación y completarla para poder ubicar porotos. Los docentes pueden incluir otras afirmaciones con la misma tarea y considerar que para algunos carteles haya más de una figura como respuesta posible. En este último caso, además, se solicita decidir qué característica las diferencia. También se incluyen otras actividades fuera del contexto de juego, como escribir tres características para algunas figuras y también la o las diferencias entre pares de figuras dibujadas. En esta versión se espera que los niños tengan en cuenta el número de lados, si son o no lados iguales (de la misma medida), el número de vértices, el número de ángulos, si tiene o no ángulos iguales y si tiene o no ángulos rectos.

En cuanto a la investigación de nombres de figuras en un libro de texto o en internet, esta actividad puede dar lugar a considerar características comunes entre distintas figuras usadas en el juego y a armar grupos de figuras para ponerles nombres conocidos o no. Por ejemplo, figuras de tres lados: triángulos, figuras de cuatro lados: cuadriláteros, figuras con ángulos rectos: rectángulas, figuras sin ángulos rectos: no rectángulas, etc.

Lotería de figuras: Versión 3

Materiales

6 cartones, 12 carteles y porotos.

Reglas de juego

Se reparte a cada niño que juega un cartón y 6 porotos. Se colocan en una bolsa los 12 carteles confeccionados por la maestra con características de las figuras.

Uno de los niños en cada partida va sacando los carteles y leyendo lo que dice. Cada niño mira si las características que se leen corresponden a una de las figuras que él tiene y, si es así, pone un poroto sobre ella. Gana el que completa primero su cartón.

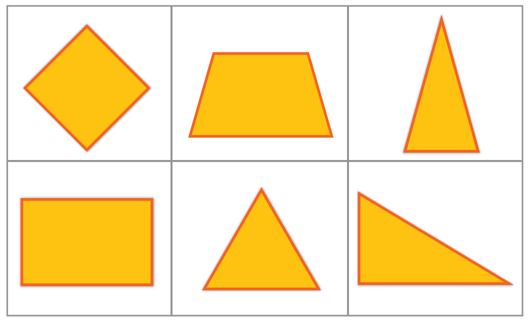
Los carteles para leer tienen dos características explicitadas y una tercera a elección del chico que lee, pero con indicación del elemento al que debe referirse.

Las dos características enunciadas pueden ser:

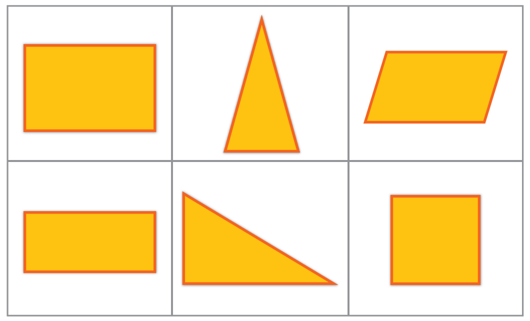
- Tiene cuatro lados, diagonales perpendiculares y ... (ángulos)
- Tiene tres lados, dos de ellos iguales y ... (ángulos)
- Tiene dos lados opuestos iguales, diagonales iguales y ... (ángulos)
- Tiene dos lados iguales consecutivos, otros dos lados también consecutivos e iguales y ... (diagonales)
- Tiene diagonales perpendiculares, ángulos rectos y ... (lados)

Después de jugar:

1 Lucía y Juan jugaron a la lotería con los cartones siguientes:



LUCÍA



JUAN

a Con los carteles siguientes, ¿quién va ganando hasta ahora?

- **Tiene tres lados, dos de ellos iguales y un ángulo recto.**
- **Tiene dos lados opuestos iguales, diagonales iguales y cuatro ángulos rectos.**
- **Tiene dos lados iguales consecutivos, otros dos lados también consecutivos e iguales y diagonales de distinta medida.**

Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

b ¿Alguno de los tres carteles permite poner el poroto en más de una figura? ¿Por qué?

2 **a** ¿Qué figuras de los cartones pondrían en un grupo donde todas tengan dos pares de lados paralelos?

b ¿Y en un grupo donde tengan al menos un par de lados paralelos?

c En papel cuadriculado dibujen las figuras de a) y de b) y busquen el nombre que tiene cada grupo en un libro de texto o en internet.

Sugerimos realizarlos en pequeños grupos

3 Al dibujar las diagonales de las figuras siguientes quedan formados triángulos.

¿Qué tipo de triángulos son? ¿Cómo pueden asegurarlo?

Análisis de la propuesta

En esta versión se espera que los niños reconozcan en las figuras, además de las propiedades de número de lados y de ángulos, y la de ángulos rectos o no, las siguientes propiedades:

- el paralelismo de los lados
- la perpendicularidad de los lados
- la igualdad de las diagonales
- la perpendicularidad de las diagonales

En este caso, los carteles para leer tienen dos propiedades explicitadas y una tercera a elección del estudiante que lee, pero con indicación del elemento al que debe referirse. Por ejemplo, el cartel dice "tiene cuatro lados, diagonales perpendiculares y … (ángulos)".
Los nuevos carteles que los docentes podrán confeccionar para poner en la caja son, por ejemplo, los siguientes:

- "tiene diagonales perpendiculares, diagonales iguales y … (lados)";
- "tiene ángulos rectos, diagonales iguales y … (lados)";
- "no tiene ángulos rectos, tiene diagonales distintas y … (lados)".

La idea es hacer carteles para todas las figuras que aparecen en los cartones y se podrá ver que cada figura puede tener carteles diferentes. Por ejemplo, al completar los siguientes carteles, ambos permiten colocar un poroto sobre un rombo.

"no tiene ángulos rectos, tiene diagonales distintas y … (lados)"

"no tiene ángulos rectos, tiene diagonales distintas y **tiene cuatro lados iguales**"

"no tiene ángulos rectos, tiene diagonales perpendiculares y … (lados)"

"no tiene ángulos rectos, tiene diagonales perpendiculares y **tiene cuatro lados iguales**"

Y también que un mismo cartel permite colocar un poroto en más de una figura. Por ejemplo: "tiene cuatro lados, tiene ángulos rectos y tiene diagonales … (iguales)", son propiedades comunes del cuadrado y del rectángulo.

Con los estudiantes más grandes, resulta interesante discutir estas cuestiones, para lo cual es posible trabajar luego de esta propuesta con alguna nueva actividad como, por ejemplo, una donde se expliciten varios conjuntos de tres propiedades y los niños deban identificar qué figura o figuras las cumplen.

En las "actividades para después de jugar", el análisis de una partida de lotería y la consideración de si hay más de una solución, están planteadas en el contexto del juego. Luego, se proponen actividades fuera del contexto del juego, como la formación de grupos de figuras con alguna característica en común; lo que puede dar lugar a elaborar conclusiones matemáticas acerca de grupos y subgrupos de figuras en función de características comunes y otras que los diferencian. Por ejemplo, el cuadrado, el rombo y el rectángulo forman parte de los "cuadriláteros" (aunque no son los únicos) porque tienen cuatro lados; pero el cuadrado y el rectángulo forman un subgrupo de "cuadriláteros con ángulos rectos" (aunque, otra vez, no son los únicos).

Por último, la actividad de trazado de diagonales y el análisis del tipo de triángulos que se forman, resulta de la reinversión de las propiedades conocidas y su encadenamiento para afirmar qué tipo de triángulo se forma, con lo que se promueve la producción de validaciones como pequeñas cadenas deductivas.

El memotest cantado

Este juego también apoya sus reglas en un juego conocido. Frente a una cantidad de imágenes en el anverso de un naipe, se van dando vuelta pares de ellos y resulta ganador el que encuentra un par idéntico. En este caso, al dar vuelta los dos naipes y constatar que son iguales, debe "cantar" una o más de una propiedad común para poder llevárselas.

Lo que diferencia estas versiones es el repertorio de figuras y el número de propiedades comunes que debe "cantar" el jugador para poder levantarlas y llevarlas.

Propuesta 9
El juego del Memotest cantado

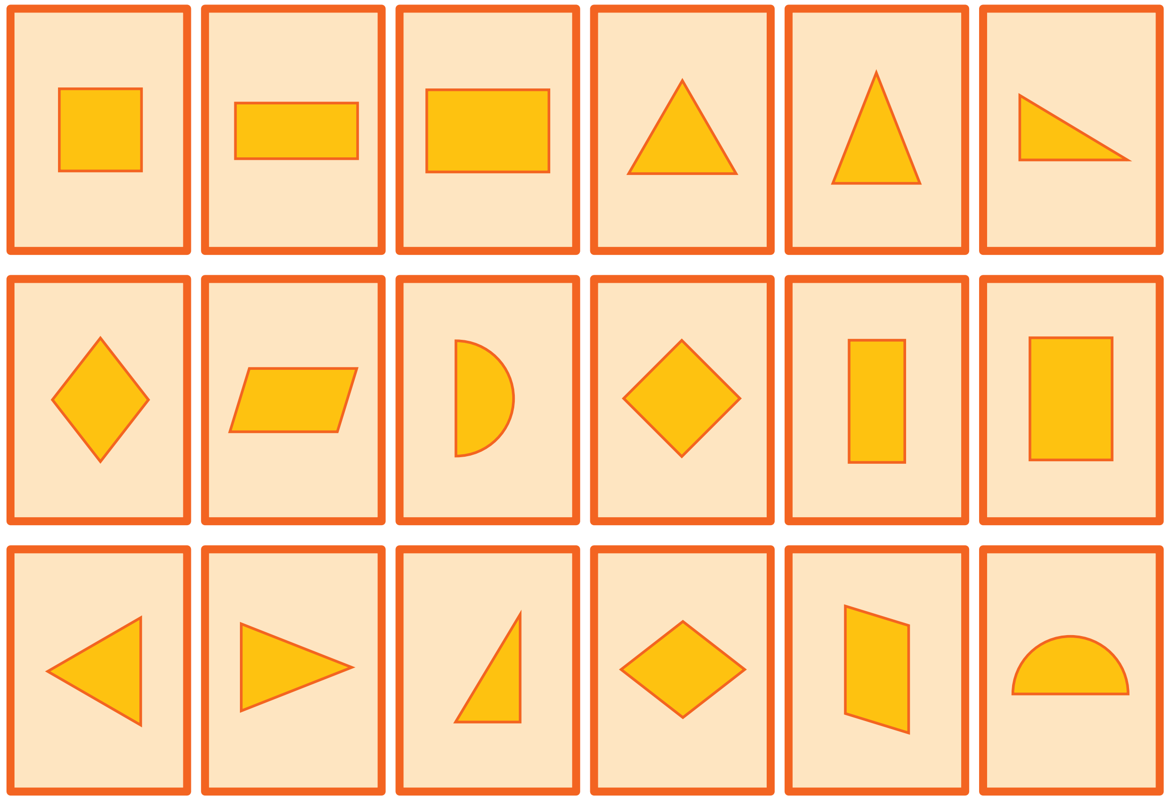
El juego del Memotest cantado: Versión 1

Materiales

18 cartas de figuras geométricas.

Reglas de juego

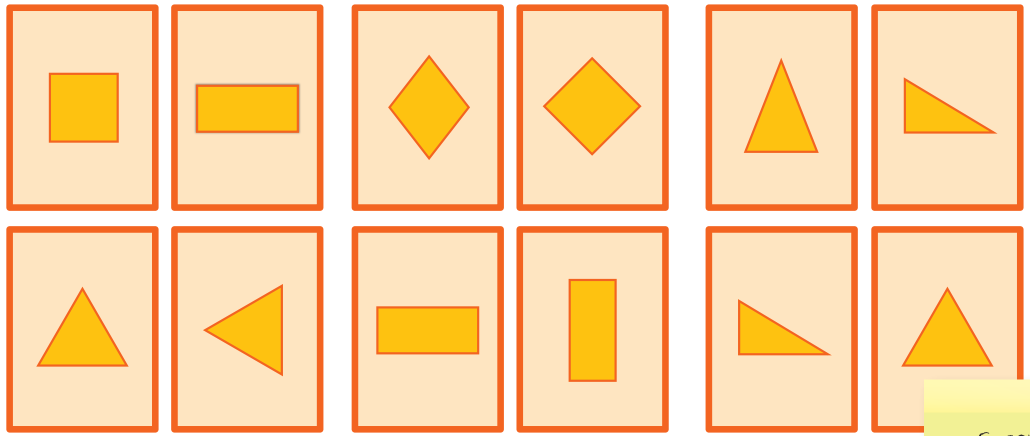
Las cartas se ubican sobre la mesa, boca abajo, organizadas en filas y columnas. A su turno cada jugador da vuelta dos cartas y si son iguales dice una propiedad común a las dos figuras y se las puede llevar. Si no es así, las vuelve a colocar boca abajo en el mismo lugar. Cuando ya no quedan cartas sobre la mesa, gana el que se haya llevado más.
Las cartas son las siguientes:



Se trata de juntar dos figuras que están dibujadas en diferente posición.

Después de jugar:

1 **a** Miren las figuras que quiso juntar Nicolás y decidan si están de acuerdo en que lo haga.



Sugerimos realizarlo en pequeños grupos

b En las que no están de acuerdo expliquen por qué.

2 **a** Matías dice que  y  no son iguales porque uno tiene lados largos y lados cortos y el otro no. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

b Anabela dice que  y  y son iguales porque si calca uno y lo pone sobre el otro, cae justito. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

3 **a** Dibujá en papel cuadriculado dos rectángulos y dos cuadrados en distinta posición.

b ¿En qué se parecen el cuadrado y el rectángulo? ¿En qué son distintos?

Análisis de la propuesta

En esta propuesta los naipes tienen representados cuadrados, rectángulos, rombos, triángulos y un semicírculo. Se trata de que los niños independicen las propiedades de una figura de su posición y reconozcan cuándo son iguales.

Es importante considerar que, aunque aquí no se requiere nombrar figuras, cuando los niños lo hacen suelen hacerlo coloquialmente, con términos que en muchos casos no corresponden a los que se usan en matemática. Por ejemplo, pueden decir “rombo largo” al romboide. Además, en el inicio de la escuela primaria vemos el rombo y el cuadrado como figuras diferentes, aunque en matemática los cuadrados son un tipo especial de rombo pues tienen cuatro lados iguales.

Las justificaciones que se puedan pedir entre los mismos alumnos durante el juego los llevarán a tratar de superponer figuras de manera directa o por calcado, lo que resulta en validaciones empíricas propias de este nivel.

En las actividades para después de jugar, una actividad de juego simulado pide analizar pares de figuras para considerar si pueden ser llevadas o no por el jugador.

Fuera del contexto del juego, se analizan las diferencias entre cuadrado y rectángulo y entre dos figuras idénticas en distinta posición. Las respuestas a esta actividad darán lugar a explicitar razones, lo que resulta una conclusión acerca de cuándo dos figuras son iguales y cuando distintas.

Por último, se propone una actividad de construcción en papel cuadriculado como reinversión de las propiedades explicitadas.

En las conclusiones matemáticas, por un lado, se podrá identificar la igualdad, es decir que

- “dos figuras son iguales si al poner una sobre otra no sobra ni falta nada” o,
- “dos figuras son iguales si se pueden superponer y coinciden exactamente”.

También, la independencia de la posición:

- “si cambio la figura de lugar, la figura es la misma”.

Por otro lado, se podrá diferenciar el cuadrado del rectángulo a partir de la medida de sus lados.

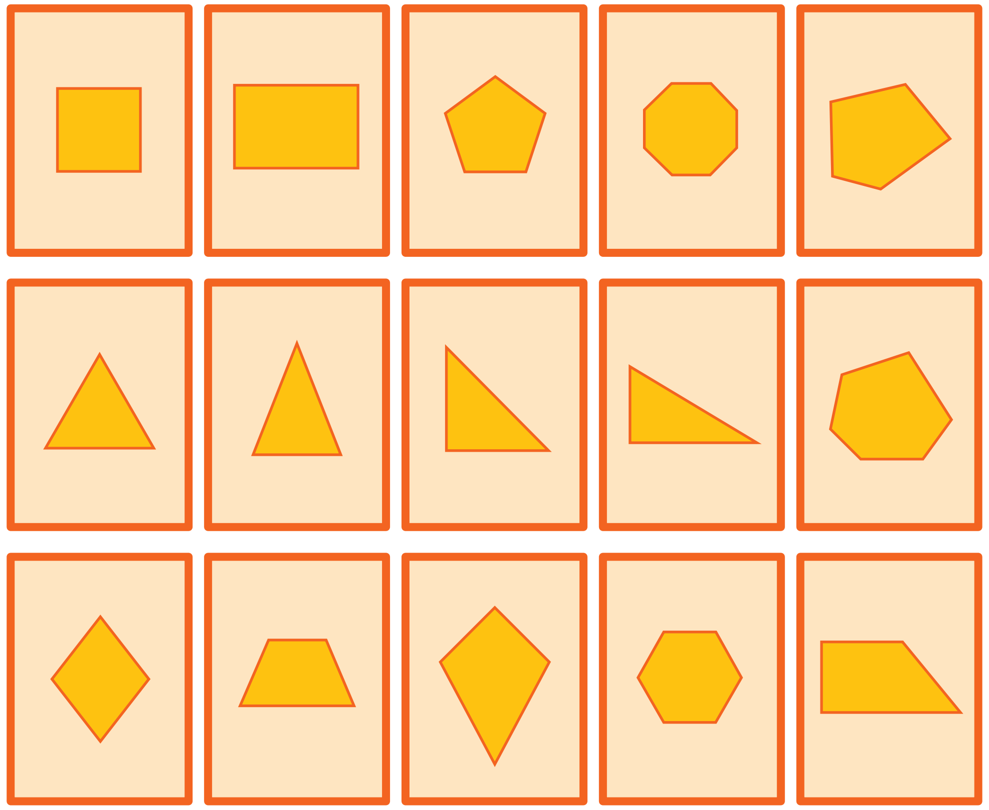
El juego del Memotest cantado: Versión 2

Materiales

15 cartas.

Reglas de juego

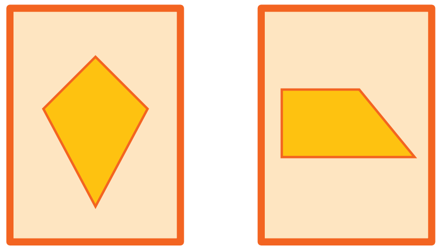
Las cartas se ubican sobre la mesa, boca abajo, organizadas en filas y columnas. A su turno cada jugador da vuelta dos cartas y, si puede decir dos propiedades comunes se las llevan. Si no es así, las vuelve a colocar boca abajo en el mismo lugar. Cuando ya no quedan cartas sobre la mesa, gana el que se haya llevado más.



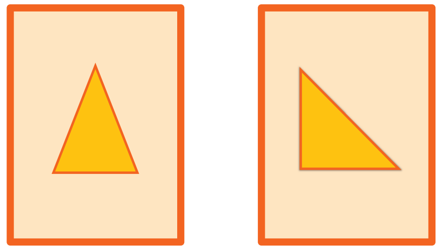
Se trata de buscar si las dos cartas levantadas tienen dos propiedades en común. Por ejemplo, "las dos tienen 4 lados y 4 ángulos" o "las dos tienen un ángulo recto y cuatro lados", o "las dos tienen dos lados iguales y cuatro vértices", etc.

Después de jugar:

1 **a** Luis sacó las dos cartas siguientes y dice que no se las puede llevar. Ariel dice que él encontró algo en común. ¿Quién les parece que tiene razón? ¿Por qué?



b ¿Qué puede decir Ariel para llevarse estas dos cartas?



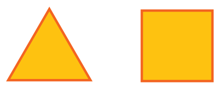
Sugerimos realizarlos en pequeños grupos

2 Busquen, si es posible, dos pares de cartas para cada cantada.

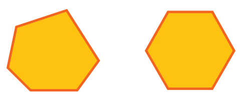
- **Tiene todos los ángulos iguales y ángulos rectos.**
- **Tiene los dos lados iguales y no tienen ángulos rectos.**
- **Tiene ángulos rectos y la misma cantidad de lados iguales.**
- **Tienen la misma cantidad de lados iguales y un ángulo recto.**
- **Tienen dos pares de lados iguales y cuatro vértices.**

3 Javier y Amalia discuten porque buscaron pares de cartas diferentes para "Tienen la misma cantidad de ángulos" ¿Alguno eligió bien? ¿Por qué?

Javier



Amalia



Sugerimos realizarlos en pequeños grupos

4 **a** Formen grupos de figuras donde todas tengan una característica común y pongan un nombre al grupo para identificarlo. Por ejemplo: "Las figuras que tienen todos los lados iguales".

b Compartan con otro grupo los nombres y características que eligieron y vean si están de acuerdo.

Análisis de la propuesta

En este caso, cambia el repertorio de figuras respecto del considerado en la propuesta amarilla, ampliando a otros cuadriláteros y a figuras de mayor cantidad de lados. También cambia cómo “cantar” para llevarse las dos figuras; ya no deben decir una propiedad igual para ambas sino dos.

Como actividades para después de jugar, se incluye una actividad de juego simulado donde se solicita el análisis de pares de cartas, la búsqueda de “una cantada” para un par; buscar pares que correspondan a “una cantada” y comparación de dos cantadas diferentes para los mismos pares.

Por último, como actividad fuera del contexto de juego, se solicita formar grupos de figuras donde todas tengan una característica común y poner un nombre al grupo de figuras para identificarlo.

Las conclusiones matemáticas que se pueden derivar se refieren al número de propiedades que pueden identificarse en cada figura. Por ejemplo:

- “Si decimos una propiedad, encontramos varias figuras que la cumplen. “Cuatro lados” tienen el cuadrado, el rombo, el rectángulo, el trapecio y otras”.
- Si decimos dos propiedades, encontramos menos figuras que la cumplen. “Cuatro lados y los cuatro iguales” tienen el cuadrado y el rombo pero no las otras.
- Dos figuras pueden tener más de una propiedad común.

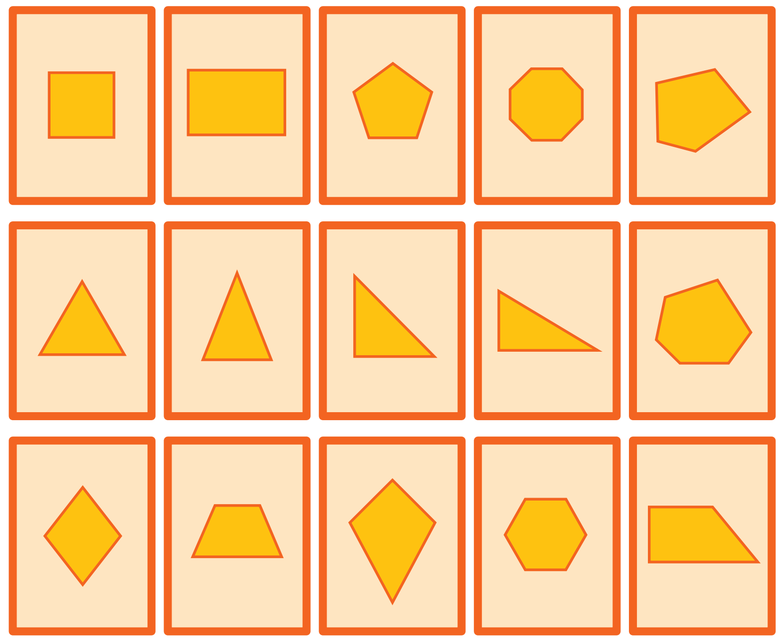
El juego del Memotest cantado: Versión 2

Materiales

15 cartas.

Reglas de juego

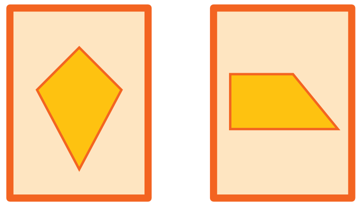
Las cartas se ubican sobre la mesa, boca abajo, organizadas en filas y columnas. A su turno cada jugador da vuelta dos cartas y, si tienen dos propiedades en común, se las puede llevar si dice en qué se parecen. Si no es así, las vuelve a colocar boca abajo en el mismo lugar. Cuando ya no quedan cartas sobre la mesa, gana el que se haya llevado más.



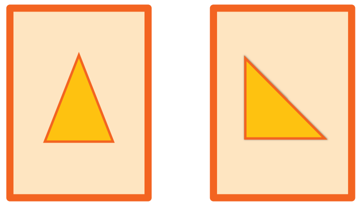
Se trata de buscar si las dos cartas levantadas tienen dos propiedades en común. Por ejemplo: “tienen cuatro lados y dos lados son iguales" o “tienen dos lados iguales y otros dos lados iguales", etc.

Después de jugar:

1 **a** Luis sacó las dos cartas siguientes y dice que no se las puede llevar. Pero Ariel dice que él sí encontró dos características comunes. ¿Te parece que tiene razón? ¿Por qué?



b ¿Qué puede decir Ariel para llevarse estas dos cartas?

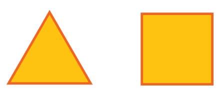


2 Buscá un par de cartas para cada "cantada":

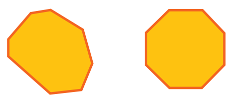
- **Tienen todos los ángulos iguales y los lados iguales.**
- **Tienen ángulos rectos y cuatro lados.**
- **Tienen la misma cantidad de lados y de lados iguales.**
- **Tienen dos lados iguales y otros dos también iguales.**

3 **a** Javier y Amalia discuten porque buscaron pares de cartas diferentes para "Tienen la misma cantidad de ángulos y de lados" ¿Alguno eligió bien? ¿Por qué?

Javier



Amalia



b ¿Pueden buscar un par de cartas que cumpla una condición y no la otra?

Sugerimos realizarlos en pequeños grupos

4 **a** Formen grupos de figuras donde todas tengan una característica común y pongan un nombre al grupo para identificarlo. Por ejemplo: "Las figuras que tienen todos los lados iguales".

b ¿Pueden buscar un par de cartas que cumpla una condición y no la otra?

5 Escriban adivinanzas y luego se las dan a otro grupo para ver si logran descubrir la figura. Por ejemplo:

"Tengo 4 lados, dos iguales entre sí y otros dos también. No tengo 4 ángulos rectos. ¿Quién soy?"

Sugerimos realizarlos en pequeños grupos

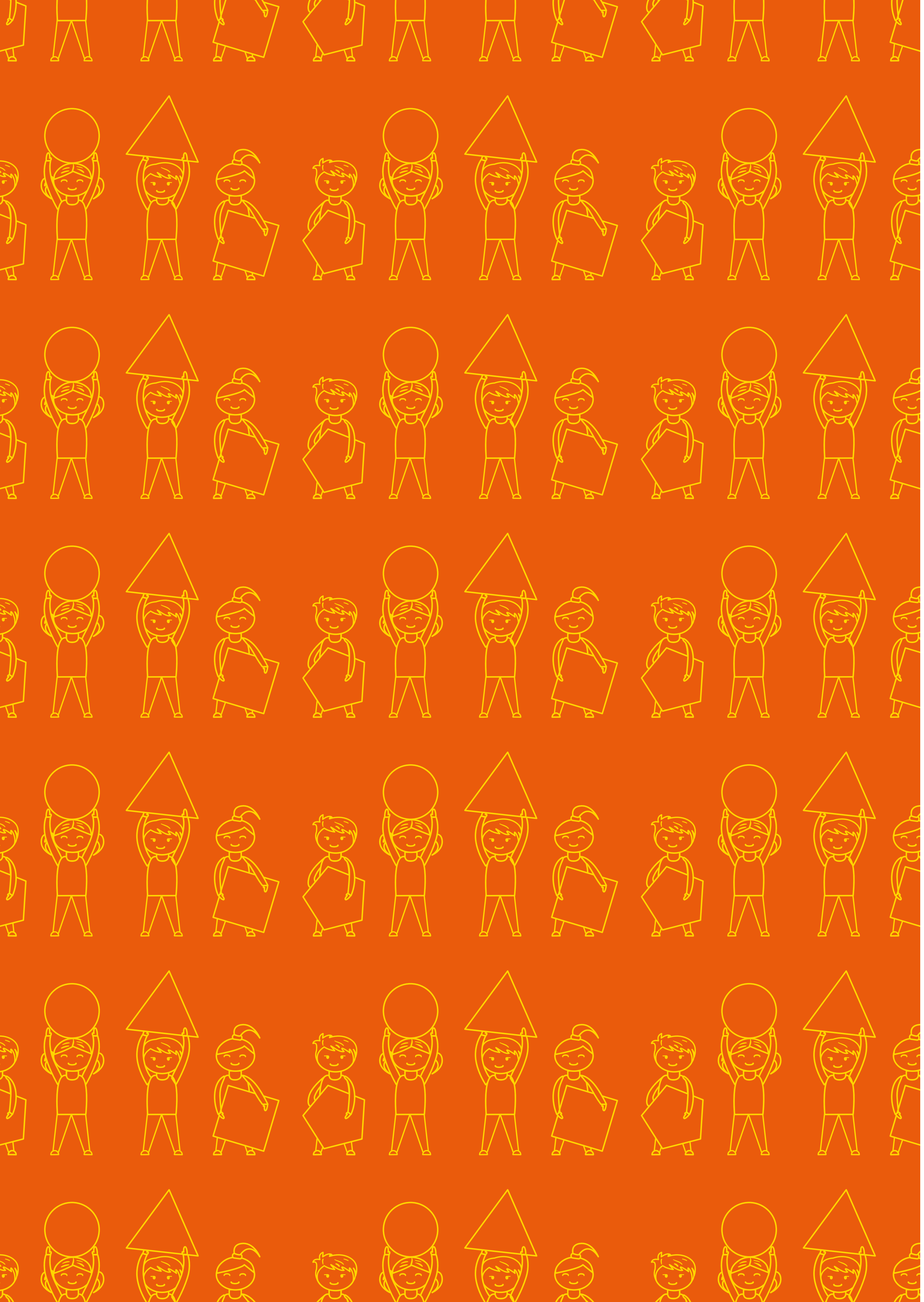
Análisis de la propuesta

En esta versión también se trata de buscar entre las cartas levantadas dos propiedades comunes. La diferencia en relación con las situaciones planteadas en la propuesta naranja está en que los alumnos podrán usar nuevas propiedades y en que es posible discutir y perfeccionar el modo de expresar las propiedades. En casos como "tener cuatro lados" o "tener cuatro ángulos" no hay dudas, pero al referirse a los ángulos rectos los alumnos podrán decir que el romboide dibujado tiene uno y el trapecio rectángulo dos. En este caso, se podría acordar que una formulación que los incluya a ambos sería "tienen cuatro lados y al menos un ángulo recto".

Las actividades planteadas para después del juego retoman con mayor complejidad las mismas que se han planteado para la propuesta de la versión 2 y se incorpora una escritura de adivinanzas para luego intercambiar con un compañero y jugar a descubrir la figura.

Las conclusiones matemáticas a las que se pueden arribar a partir de esta propuesta, se refieren a que:

- No es lo mismo decir "tiene dos lados iguales" –el triángulo equilátero lo cumple y el triángulo isósceles también–, que decir "tiene sólo dos lados iguales" –el triángulo equilátero no lo cumple pero sí el isósceles.
- Si decimos "tiene al menos dos lados iguales" no sabemos si se trata del rectángulo o del cuadrado, pues ambos lo cumplen.
- Cuando decimos "tiene un ángulo recto" puede querer decir "uno solo" o "al menos uno".



Conclusiones en la clase de plurigrado

Se considera, en este enfoque, que dado que los conocimientos se van construyendo al resolver problemas, es necesario incluir en la clase espacios de debate, de intercambio colectivo y de elaboración de conclusiones en los que se expliciten y anoten las ideas trabajadas.

Esta última discusión deberá tener un cierre en el que el docente destaque sintéticamente los contenidos trabajados. Esta última etapa de cierre está íntimamente ligada a la intencionalidad didáctica de la actividad planteada, a los contenidos que se han querido trabajar y al alcance logrado por la producción de los diferentes grupos respecto de este contenido. El cierre permite al docente presentar las denominaciones, representaciones y relaciones con otros conocimientos considerados válidos en Matemática de los conocimientos utilizados durante el juego. A su vez, permite que los alumnos tomen conciencia de que han logrado un nuevo aprendizaje y reconozcan en forma explícita las relaciones de lo nuevo con lo conocido. (M.E.N, 2004, p. 6)

También se conoce que en la clase de plurigrado la diferenciación de tareas es aún mayor que en una clase común. Por eso, se destaca el lugar de las conclusiones matemáticas para el conjunto de la clase.

Si se registran los conocimientos a los que se llega con cada grupo, y dado que se va avanzando en el nivel de complejidad, será posible extender aquellas conclusiones a las que arriben los niños más pequeños a los grupos mayores. Por ejemplo, para el juego de memotest hemos señalado conclusiones sobre:

- Las figuras tienen elementos y esos elementos tienen propiedades.
- Hay figuras que tienen propiedades iguales y otras distintas.
- Cuanto más se conoce una figura más propiedades se saben sobre ella.

En un momento común de presentación de lo trabajado, los niños podrán expresar lo aprendido incluyendo ejemplos para que sus compañeros los comprendan, entendiendo que cada uno podrá incorporar lo que se presenta según sus posibilidades y que las actividades posteriores para cada grupo estarán en relación solamente con sus propias conclusiones.

Bibliografía

Altman, S., Comparatore, C., y Kurzrok, L. (2009). La enseñanza de la geometría en la escuela. 12ntes, (3), 4.

De Villiers, M. (1993). Rol y función de una clasificación jerárquica de cuadriláteros.

Gálvez, G. (1985). El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la Geometría en la Escuela Primaria, Tesis doctoral, Centro de Investigaciones del IPN, México.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación. (2003-2006). Matemática 1 a 7. Cuadernos para el aula. http://repositorio.educacion.gov.ar/dspace/handle/123456789/96737

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación. (2004). Juegos en Matemática E.G.B. 2. Buenos Aires, Argentina. http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL001220.pdf

Ministerio De Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación. (2012). Matemática: leer, escribir y argumentar. Buenos Aires, Argentina. http://repositorio.educacion.gov.ar:8080/dspace/handle/123456789/96360

Moriena, S. y Scaglia, S. (2003). Efecto de las representaciones estereotipadas en la enseñanza de la geometría. Educación Matemática, Vol (15), pp. 5 - 19.

Sadovsky, P. y otros (1998). Matemática. Documento de trabajo Nº 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. Serie Actualización Curricular, GCBA.

Winicki Landman, G. (2006). Las definiciones en Matemáticas y los procesos de su formulación: Algunas reflexiones. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen (19), pp. 528-537.

Para descargar las propuestas en su versión imprimible, ingresá en www.fundacionbyb.org/publicaciones

Matemática en aulas de plurigrado:
las nociones espaciales y geométricas en la escuela primaria

DIRECCIÓN
Clara María Gonzales Chaves

COORDINACIÓN DE EDICIÓN, DISEÑO E IMPRENTA
Ezequiel Bacher

AUTORAS
Cecilia Laspina
María Laura Imvinkelried

DISEÑO GRÁFICO
Albano García

EQUIPO DE PROYECTO
Aldana Álvarez
Clara María Gonzales Chaves
Paz Saavedra
Valeria Schildknecht

Esta publicación está basada en los materiales producidos por Mónica Agrasar y Graciela Chemello para los cursos a distancia dictados entre 2010 y 2018 en el marco del Programa Sembrador, un programa de la Fundación Bunge y Born en alianza con la Fundación Perez Companc. Buenos Aires, 2020.

FSC
www.fsc.org
MIXTO
Papel procedente de fuentes responsables
FSC® C121479

Este producto está hecho de fibra de bosques bien gestionados y otras fuentes controladas. Así lo certifica FSC® (Forest Stewardship Council®), una organización internacional sin fines de lucro que promueve el manejo responsable de bosques y plantaciones en el mundo entero.

Se terminó de imprimir en Akian Gráfica Editora S.A., en septiembre de 2020.

Fundación
Perez Companc

FUNDACIÓN
BUNGE Y BORN